Digitized by Google

Google

L14:12:12:460

BCU - Lausanne
1094799609

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

RECREATIONS MATHEMATIQUES ET PHYSIQUES,

QUI CONTIENNENT

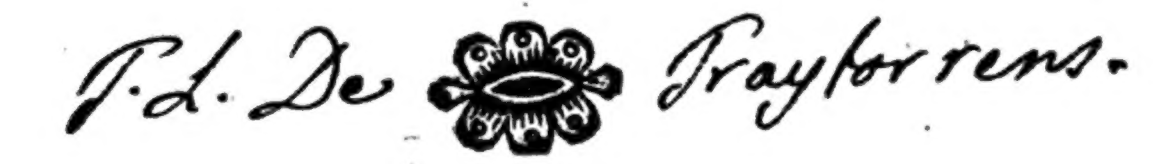
PLUSIEURS PROBLEMES D'ARITHMETIQUE, de Géometrie, de Musique, d'Optique, de Gnomonique, de Cosmographie, de Mécanique, de Pyrotechnie, & de Physique. Avec un Traité des Horloges Elementaires.

Par feu M. OZANAM, *de l'Académie Royale des Sciences, & Professeur en Mathematique.*

NOUVELLE EDITION,

Revûe, corrigée & augmentée.

TOME PREMIER.



A PARIS, QUAY DES AUGUSTINS,

Chez JACQUES ROLLIN, fils, à St. Athanase & au Palmier.

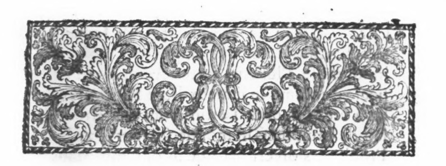
M. DCC. L.

AVEC PRIVILEGE DU ROY.

CANTON DE VAUD
BIBLIOTHEQUE CANTONALE
LIBERTE ET PATRIE

Digitized by Google

Digitized by Google



PREFACE

JE ne m'excuserai pas de ce qu'après avoir donné au Public des Traités serieux, qui demandent toute l'application des Lecteurs, il semble que je veuille dissiper leur application, & les en détourner par les jeux d'esprits que je leur présente dans ces derniers Volumes. La mémoire des grands hommes qui ont fait la même chose que j'entreprends, est si glorieuse, que leur exemple vaut toutes les justifications que je pourrois apporter. Le docte Bachet, sieur de Meziriac, célebre par ses excellens Ouvrages, commença à se faire connoître dans la République des Lettres par un Recueil qu'il intitula, *Problêmes plaisans, qui se font par les Nombres.* Il voulut par ce Livre s'assûrer de son talent, & du jugement du Public, avant que de mettre au jour ses Commentaires sur

l'Arithmétique de Diophante, & les autres livres qui lui ont acquis une gloire immortelle. Plusieurs autres Auteurs de ce siécle, comme le fameux Pere Kircher, & les Peres Schot & Bertin n'ont pas moins fait de bruit dans le monde sçavant, par les Problêmes divertissans qu'ils ont mis dans leurs Ouvrages, que par leurs raisonnemens, & par leurs plus sérieuses observations.

Quoique ces grands exemples puissent suffire pour autoriser mon dessein, néanmoins afin que ces hommes illustres, que j'ai pris pour garants, ne soient pas eux-mêmes exposés à la censure de ceux qui voudroient les accuser de nouveauté; je produirai des exemples bien plus anciens, qui font voir que de tout tems les plus grands hommes ont tenu la même conduite, s'étant bien apperçus que le même fonds de raison qui fait trouver du plaisir dans l'admiration, en doit aussi faire trouver dans les choses qui font le sujet de l'admiration.

Le commerce d'Enigmes que les Rois de Syrie entretenoient, & qui a fait durer si long-tems après eux le Stile Parabolique, n'étoit autre chose que des jeux d'esprit, & des entretiens également propres à exciter le plaisir, & à donner de

Digitized by Google

l'élévation à l'esprit. Les Grands de ce tems-là étoient faits comme ceux d'aujourd'hui, la peine les rebutoit, c'étoit un coup de l'adresse & de l'habileté extraordinaire de ceux qui les vouloient instruire, que de les attacher à l'étude & à la réflexion, par le plaisir & par la curiosité. Je ne doute pas que l'éducation que Nathan donna à Salomon par cette exercice, n'ait beaucoup contribué à cette élévation d'ame, & à cette sagesse merveilleuse qui fait le caractere & la gloire de ce Prince.

C'étoit aussi par maniere de divertissement que les Chaldéens & les Egyptiens qui ont inventé l'Astronomie, marquoient par avance à leurs amis les jours & les circonstances des Eclipses, & qu'ils leur traçoient des figures qui partageoint la durée des jours, qui montroient les routes des Etoiles, & qui représentoient toutes les variétés des mouvemens des Cieux; persuadez, aussi-bien que les Grecs, que les premiers plaisirs de l'esprit sont ceux que l'on emprunte des Mathématiques, dans lesquels ils faisoient élever leurs enfans. Ils croyoient que si la raison des enfans étoit sans action, elle n'étoit pas néanmoins sans force, & qu'il n'y avoit qu'à lui donner du mouvement pour la perfection-

ner, ce qui se pouvoit faire, en donnant aux enfans de la curiosité qui fait en eux ce qu'une longue suite de nécessités de la vie fait dans les personnes d'un âge plus avancé. C'est là le secret de Socrate, qui tiroit des enfans les résolutions les plus difficiles de la Géométrie, & de l'Arithmetique; c'étoit la clef avec laquelle il leur ouvroit l'esprit, il connoissoit leurs forces, il présidoit leur destinée: c'étoit le Démon ou le Génie qu'il consultoit, & qui ne le quittoit jamais.

Bien que les jeux d'esprit, dont je parle, soient des amusemens, ils ne sont peut-être pas moins utiles que les exercices, ausquels on applique les jeunes personnes de qualité, pour façonner leurs corps, & pour leur donner le bon air: car s'accoutumer à connoître les proportions, la force des mélanges, à connoître le point qu'on cherche dans la confusion, à prendre de justes mesures dans les propositions les plus embrouillées & les plus surprenantes, c'est se faire l'esprit aux affaires, c'est s'armer contre les surprises, c'est se préparer à vaincre les difficultés imprévûes; ce qui vaut bien autant que d'assurer sa démarche par les leçons des Maîtres à danser, ou le ton de sa voix par celle des Musiciens.

Ne faut-il pas outre cela que l'on se dé-

Digitized by

lasse quelquefois ? & se peut-on délasser par des divertissemens que l'on méprise, ou dont on a honte ? Un homme d'Etat voudroit-il danser au sortir du Conseil & des plus grandes affaires ? Seroit-il bien séant qu'il fut trouvé dans les exercices où il passoit son tems dans sa jeunesse ? La bienséance, les affaires, & la santé ne le permettent pas. Mais les jeux d'esprit sont de toutes les saisons & de tous les âges ; ils instruisent les Jeunes, ils divertissent les Vieux, ils conviennent aux Riches, & ne sont pas au-dessus de la portée des Pauvres ; les deux Sexes s'en peuvent accommoder sans choquer la bienséance.

Ceux qui ont eu la curiosité d'épier la conduite des grands Hommes dans leur particulier, ont trouvé qu'ils se sont distingués dans leurs divertissemens comme dans leur serieux. Auguste jouoit les soirs avec sa famille à des jeux d'esprit ; il ne croyoit pas cela au-dessous de lui ; il écrivoit avec autant d'exactitude le détail de ses divertissemens que celui des affaires sérieuses. Le sçavant Jurisconsulte Mucius Scevola après avoir répondu à ceux qui le venoient consulter, se divertissoit à jouer aux Echets, & étoit devenu un des meilleur Joueurs de son tems. Le Pape Leon

X. l'un des plus grands hommes de son siécle, jouoit aussi quelquefois aux Echets, si l'on en croit Paul Jove, pour se délasser de la fatigue des affaires.

Il est certain que le Jeu des Echets a été inventé pour instruire, aussi-bien que pour divertir; en représentant les attaques & les défenses des pieces differentes, leur marche, & leurs avantures, on a voulu faire des leçons de morale, & montrer par le désastre du Roi des Echets, qu'un Prince tombe immanquablement au pouvoir de ses ennemis quand il s'est dépouillé de ses soldats, & qu'il ne peut négliger la perte d'un seul de ses sujets, sans s'exposer à celle de ses propres Etats.

On peut réduire tous les Jeux qui ont été inventés, ou qu'on pourroit inventer à trois classes différentes: la premiere est de ceux qui dépendent absolument des nombres & des figures, comme les Echets, le Jeu des Dames, & quelques autres: la seconde de ceux qui dépendent du hazard, comme les Dez, & les Jeux semblables: la troisiéme de ceux qui dépendent de la justesse des mouvemens, comme les Jeux de l'Arquebuse, de l'Arc, de la Paume, & du Billard; il y en a qui sont mêlés d'adresse & de hazard, comme le Trictrac, le Hocca, les Cartes, & la plûpart des

Digitized by Google

autres. Mais il est constant qu'il n'y en a point qu'on ne puisse tellement soumettre aux Regles des Mathématiciens, que l'on ne fut assûré de gagner, si l'on y pouvoit apporter toute l'habileté nécessaire. Les Jeux d'adresse ont tant de rapport aux principes de la Statique & de la Mécanique, que ce n'est que faute d'en bien sçavoir les Regles, ou de les bien mettre en usage, que l'on ne gagne pas dans ces Jeux-là. Il n'y a point de Jeu de hazard, où la victoire ne dépende de la rencontre d'un nombre, ou du poids, ou de l'étendue de la figure. Le Joueur qui imprime le mouvement, pourroit déterminer la fin, s'il étoit parfaitement habile, & quoique cela ne paroisse pas possible, parce qu'on ne trouve personne d'une parfaite habileté, il est néanmoins vrai que l'on pourroit le faire, & qu'une méthode infaillible de gagner aux Echets, n'est pas absolument impossible; personne ne l'a encore trouvée, & je ne crois pas qu'on la trouve jamais, parce qu'elle dépend d'un trop grand nombre de combinaisons. C'est assez qu'un point de perfection soit possible, pour engager les Curieux au travail. L'Orateur parfait, disoit Ciceron, n'a jamais été, mais il est possible; son idée telle que ce grand Maître l'a peint, sert

V. l'Essai d'Analyse sur les Jeux de hazard par M. de Montmaur

Digitized by Google

de modele à ceux qui ſe mettent en devoir de ſe rendre habiles en Eloquence. Il en eſt de même du Poëte, du Peintre, de l'Architecte, du Medecin, & de tous les autres. Auſſi quoiqu'il ſoit vrai que perſonne ne ſçaura jamais la méthode immanquable de tous les Jeux, ni peut-être d'aucun, néanmoins, il ne faut pas laiſſer de s'y rendre le plus habile que l'on peut, en tâchant d'approcher de l'idée qu'on ſe fait de cette méthode, qui eſt enfermée dans l'exactitude des regles & des principes des Mathématiques.

C'eſt une choſe bien extraordinaire, que de vouloir mettre les Joueurs dans mon parti, & engager dans l'étude des Recréations Mathématiques les hommes d'Etat, & les Capitaines; mais puis-je empêcher tout le monde de profiter des leçons qui ſont établies ſur les principes les plus naturels, & ſur les vérités attachées à l'eſſenſe des choſes? Puis-je défendre des plaiſirs qui ſont engageans par leur utilité, & qui ſont ſi communs, ſi faciles, & ſi propres à tous ceux qui ont de la raiſon; qu'on ne peut les ôter aux hommes, ſans les priver de ce qu'il y a de plus agréable à la vie.

On croit depuis ſi long-tems qu'il y a en quelque Art ſecret entre les plus ſça-

vans des Juifs, des Arabes, & des Disciples de cette ancienne Académie qui tenoit en Egypte où Moyse fut élevé, & qui florissoit encore du tems de Salomon, que cela a excité la curiosité des meilleurs esprits, pour découvrir ce qui en est: mais le moyen d'apprendre un Art sans Maître & sans Livres? Les Sçavans de ces tems-là n'écrivoient point, ou s'ils écrivoient, c'étoient des Enigmes & des Discours si éloignés de ce qu'on attend, qu'on peut dire que leur silence est plus instructif que leur discours.

Le Pere Schot dit qu'il y a trois sortes de Cabales; c'est le nom qu'il donne à cet Art secret des Orientaux, celle des Rabins, celle de Raimond Lulle, & celle des Algebristres. Il ne peut dire ce que c'est que la premiere, les deux dernieres sont des Jeux de nombres & des figures; je ne doute pas que la premiere ne soit la même chose. Joseph qui étoit Prêtre, écrit hardiment que par le droit de sa naissance, il avoit été instruit dans tous les mysteres des Juifs, & qu'on lui avoit enseigné tous les secrets de leur Art. Il se flata par un esprit de Cour, qui l'emporta par dessus sa conscience, d'avoir prédit par la force de cet Art l'élévation de Titus qui fut Empereur. Il cacha son jeu, comme un

habile homme doit faire. Il ſoutient le perſonnage de merveilleux, & quand il parle de l'avanture où il faillit à perdre la vie par le déſeſpoir de ſes ſoldats, réſolus de s'égorger les uns les autres plûtôt que de ſe rendre aux Romains, il attribue ſa converſation ou au hazard, ou à un miracle. Cependant il eſt à croire que Joſeph ne fit ce miracle que par la ſcience des nombres & des figures; il fit ranger ces déſeſperés de maniere que le ſort tomba ſur ceux que le Capitaine voulut bien laiſſer périr. Il ſauva ſa vie, parce qu'il étoit Mathématicien; & non pas parce qu'il étoit Lévite. Ce qui fait voir que les connoiſſances les plus abſtraites ſe peuvent réduire en pratique, & qu'on peut mettre à quelque uſage ce qui en paroît le plus éloigné.

V. page 248. du Tome I.

Je m'étonne de ce que du tems des Empereurs Diocletien & Conſtantin, les Loix défendirent les Mathématiques, comme des connoiſſances dangereuſes, en condamnant les Mathématiciens & les Sorciers aux mêmes peines; comme également criminels & pernicieux à la ſociété civile, ſelon ce qui paroît par le Titre 17 du Livre 9 du Code de Juſtinien. Je crois que c'eſt par l'ignorance qui regnoit en ce tems-là, & par le grand nombre des

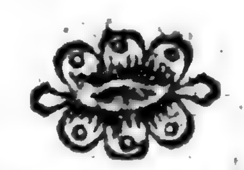
Charlatans, qui se servoient des Mathématiques pour imposer & pour tromper la crédulité des ignorans. Mais il faut blâmer la stupidité de ceux qui se laissent tromper, & il ne faut pas autoriser la fainéantise de ceux qui ne veulent pas cultiver assez leur esprit pour être en état de n'être jamais surpris. On a vû des Etats qui ont permis les souplesses, les petits larcins faits avec adresse, pour tenir les particuliers sur leurs gardes, & pour les accoutumer à prendre toujours de bonnes précautions.

L'ignorance tient le monde dans une admiration perpetuelle, & dans la méfiance; ce qui produit toujours un envie invincible de blâmer & de persécuter ceux qui sçavent quelque chose de plus que le commun, qui n'étant pas accoutumé à s'élever au-dessus des choses sensibles, & ne pouvant s'imaginer que la Nature employe des agens qui ne soient pas visibles & palpables, attribue souvent aux Sorciers & aux Démons tous les effets, dont il ne connoît pas la cause. Je veux par mes Recréations Mathématiques, enseigner tout le monde à faire ces sorcelleries, qui faisoient peur aux gens du Conseil de Justinien; & par là je ferai plus qu'un sçavant homme *, qui s'est contenté du simple rai-

* Gabriel Naudé.

ſonnement, pour défendre Saint Thomas d'Aquin, Albert le Grand, Salomon, & pluſieurs autres grands Hommes, qui n'ont été accuſés d'être Magiciens, que parce qu'ils ſçavoient faire quelque choſe de plus que les autres.

Un ſeul Livre n'étant pas capable de contenir toutes les propoſitions qu'on peut faire ſur cette matiere, on a diviſé cet Ouvrage en trois Volumes, où l'on donne les Problêmes les plus faciles, les plus utiles & les plus agréables. Le premier contient les Problêmes d'Arithmétique, de Géométrie, de Muſique & d'Optique. Le ſecond Volume comprend les Problêmes de Gnomonique, de Coſmographie & de Mécanique. Le troiſiéme Volume renferme les Problêmes de Pyrotechnie, & de Phyſique, avec un Traité des Horloges Elementaires.



Digitized by Google

PRIVILEGE DU ROY.

LOUIS, par la Grace de Dieu, Roi de France & de Navarre : A nos amés & féaux Conseillers les Gens tenans nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, Grand Conseil, Prevôt de Paris, Baillifs, Sénéchaux, leurs Lieutenans Civils & autres nos Justiciers qu'il appartiendra, SALUT. Notre bien amé C. A. JOMBERT, Libraire à Paris. Nous ayant fait remontrer qu'il desireroit faire réimprimer & donner au Public des Livres qui ont pour titre : *Les Oeuvres de Mathématiques, de feu M. Ozanam, de l'Academie des Sciences, Secrets des Arts & Métiers, le Teinturier parfait, l'Art de la Verrerie, l'Art de tourner, du Pere Plumier* : S'il nous plaisoit lui accorder de nos Lettres de Privilege sur ce nécessaires. A CES CAUSES, voulant favorablement traiter ledit Exposant. Nous lui avons permis & permettons par ces Présentes, de faire réimprimer lesdits Livres en un ou plusieurs Volumes, & autant de fois que bon lui semblera, & de les vendre, faire vendre, debiter par tout notre Royaume, pendant le tems de neuf années consécutives, à compter du jour de la date desdites Présentes : faisons défenses à toutes sortes de personnes, de quelque qualité & condition qu'elles soient, d'en introduire d'impression étrangere dans aucun lieu de notre obéïssance, comme aussi à tous Libraires & Imprimeurs, d'imprimer, faire imprimer, vendre, faire vendre, débiter, ni contrefaire lesdits Livres, en tout, ni en partie ; ni d'en faire aucuns Extraits, sous quelque prétexte que ce soit, d'augmentations, corrections, & autres, sans la permission par écrit dudit Exposant, ou de ceux qui auront droit de lui, à peine de confiscation des Exemplaires contrefaits, de trois mille livres d'amende contre chacun des contrevenans, dont un tiers à Nous, un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris, l'autre tiers audit Exposant, ou à celui qui a droit de lui, & de tous dépens, dommages & intérêts ; à la charge que ces Présentes seront enregistrées tout au long sur le Registre de la Communauté des Libraires & Imprimeurs de Paris, dans trois mois de la date d'icelles ; que la réimpression

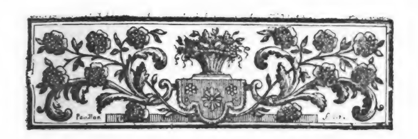
desdits Livres sera faite dans notre Royaume, & non ailleurs, en bon papier & beaux caracteres, conformément à la feuille imprimée, attachée pour modele sous le contre-scel des Présentes; que l'Impétrant se conformera en tout aux Réglemens de la Librairie, & notamment à celui du 10 Avril 1725, & qu'avant de les exposer en vente, les Manuscrits ou imprimés qui auront servi de copie à la réimpression desdits Livres, seront remis dans le même état où l'Approbation y auront été données, ès mains de notre très-cher & féal Chevalier le Sieur Daguesseau, Chancelier de France, Commandeur de nos Ordres, & qu'il en sera ensuite remis deux Exemplaires dans notre Bibliothéque publique, un dans celle de notre Château du Louvre, & un dans celle de notredit très-cher & féal Chevalier Daguesseau, Chancelier de France, Commandeur de nos Ordres, le tout à peine de nullité des Présentes. Du contenu desquelles vous mandons & enjoignons de faire jouir ledit Exposant, ou ses ayans cause, pleinement & paisiblement, sans souffrir qu'il leur soit fait aucun trouble ou empêchement. Voulons que la copie desdites Présentes, qui sera imprimée tout au long au commencement ou à la fin desd. Livres, soit tenue pour dûement signifiée, & qu'aux copies collationnées par l'un de nos amés & féaux Conseillers & Secrétaires foi soit ajoûtée comme à l'original: Commandons au premier notre Huissier ou Sergent sur ce requis, de faire pour l'exécution d'icelles tous Actes requis & nécessaires, sans demander autre permission, & nonobstant clameur de Haro, Charte Normande, & Lettres à ce contraires. Car tel est notre plaisir. Donne' à Paris le 22e jour du mois de Juillet l'An de Grace mil sept cent quarante-six, & de notre Regne le trente-uniéme. Par le Roi en son Conseil,

SAINSON.

Registré sur le Registre 11. de la Chambre Royale des Libraires & Imprimeurs de Paris, N°. 615. Fol. 543. conformément aux anciens Reglement, confirmés par celui du 28 Février 1733. A Paris le 5. May 1746.

VINCENT, *Syndic.*

Digitized by Google



RECREATIONS MATHEMATIQUES ET PHYSIQUES.

Problêmes d'Arithmétique.

OMME je ne prétends pas proposer des Problêmes difficiles, je ne prétens pas aussi en donner les démonstrations pour ne pas embarrasser le Lecteur que je veux divertir. Je me contenterai de donner la solution de ces Problêmes par des regles qui ne sont sujettes à aucune erreur.

PROBLEME I.

Des Religieuses sont retirées en huit Cellules tellement disposées, qu'il y en a quatre dans les quatre coins du Dortoir bâti en quarré, & chacune des quatre autres est au milieu de chaque côté. L'Abbesse

qu'on ſuppoſe aveugle, fait ſa viſite : elle compte le nombre des Religieuſes qui ſont dans les trois Cellules d'un rang ; elle trouve que le nombre des Religieuſes d'un rang eſt égal à celui de chaque autre rang, en prenant pour un rang deux Cellules des coins & celle du milieu. Cette Abbeſſe fait une viſite, & compte dans chaque rang le même nombre de perſonnes que dans la premiere viſite, quoiqu'il y ſoit entré quatre hommes. Enfin dans la troiſiéme viſite qu'elle fait, elle trouve encore dans chaque rang, le même nombre de perſonnes, qu'auparavant, quoique les quatre hommes ſoient ſortis, & qu'ils ayent emmené chacun une Religieuſe.

JE ſuppoſe qu'il y ait d'abord trois Religieuſes dans chaque Cellule. L'Abbeſſe en comptera neuf à chaque rang dans la premiere viſite qu'elle fera. Si enſuite une Religieuſe ſort de chaque Cellule du coin pour entrer avec un homme dans la Cellule du milieu, qui eſt à ſa gauche, l'Abbeſſe faiſant ſa ſeconde viſite, trouvera encore neuf perſonnes dans chaque rang du Dortoir. Enfin ſi chaque homme * emmene ſa Religieuſe, & que deux Religieuſes ſortant de chaque Cellule du milieu, entrent dans l'une des Cellules des coins qui eſt à leur droite, l'Abbeſſe comptera dans une troiſiéme viſite neuf perſonnes à chaque rang du Dortoir.

REMARQUES.

On peut aiſément exécuter ce Problême avec des jettons, & le pouſſer plus loin en faiſant faire une quatriéme viſite à l'Abbeſſe, qui trouvera toujours neuf perſonnes à chaque rang du Dortoir, quoique chaque Religieuſe, qui étoit ſortie avec un hom-

* Qui étoit enfermé dans la Cellule du milieu.

Digitized by Google

me, soit rentré avec deux hommes avant cette quatriéme visite. Il faut faire passer de chaque Cellule du coin trois Religieuses dans la Cellule du milieu, où elles entreront avec leur Compagne, qui y amenera deux hommes.

Ces Figures feront connoître sensiblement ce qu'il y a à faire pour la solution de ce Problême.

3	3	3
3		3
3	3	3

2	5	2
5		5
2	5	2

4	1	4
1		1
4	1	4

1	7	1
7		7
1	7	1

PROBLEME II.

On a mené sur le bord d'une riviere un Loup, une Chevre & un Chou. On propose à un Batelier de les passer seul à seul, de maniere qu'en son absence le Loup ne fasse aucun mal à la Chevre, & que la Chevre ne touche point au Chou.

LE Batelier commencera par passer la Chevre; puis il retournera prendre le Loup; quand il

aura passé le Loup, il ramenera la Chevre qu'il laissera à bord pour passer le Chou du côté du Loup. Enfin il retournera prendre la Chevre, & la passera. Par ce moyen le Loup ne se trouvera avec la Chevre, ni la Chevre avec le Chou, qu'en la présence du Batelier.

PROBLEME III.

Trois Maris jaloux se trouvent avec leurs Femmes pendant une nuit fort obscure au passage d'une Riviere. Ils rencontrent un bateau sans Batelier. Ce bateau est si petit, qu'il ne peut porter que deux personnes à la fois. On demande comment ces six personnes passeront deux à deux, de sorte qu'aucune Femme ne demeure en la compagnie d'un ou de deux hommes, si son mari n'est présent.

DEux Femmes passerent d'abord, puis l'une ayant ramené le bateau, repassera avec la troisiéme Femme. Ensuite l'une des trois Femmes ramenera le bateau, & se mettant à terre, laissera passer les deux Hommes dont les deux Femmes sont de l'autre côté. Alors un des Hommes ramenera le bateau avec sa Femme, & la mettant à terre, il prendra le troisiéme Homme, & repassera avec lui. Enfin la Femme qui se trouve passée entrera dans le bateau, & ira chercher en deux fois les deux autres Femmes.

On met ici quatre Vers Latins qui contiennent la solution de ce Problême.

It duplex mulier, redit una, vehitque manentem;
Itque una, utuntur tunc duo puppe viri.
Par vadit & redeunt bini; mulierque sororem
Advehit: ad propriam fine maritus abit.

Digitized

REMARQUES.

On propose encore ce Problême sous le titre de trois Maîtres & de trois Valets. Les Maîtres s'accordent bien ensemble & les Valets aussi. Mais chaque Maître ne peut souffrir les Valets des deux autres Maîtres ; de maniere que s'il se trouvoit avec l'un des deux Valets en l'absence de son Maître, il ne manqueroit pas de le bien battre.

PROBLEME IV.

Faire l'Addition d'une maniere particuliere, & qui soit inconnu à tout autre.

CEtte Addition est pratiquée par les Marchands qui ne se servent point de chiffres ordinaires, pour marquer le prix de leurs marchandises. Ils se font une Arithmétique particuliere avec des lettres, ou tels autres caracteres qu'il leur plaît. Ils prennent, par exemple, ces dix lettres de notre Alphabeth, b. o. n. e. f. a. c. i. u. s. ausquelles ils donnent la valeur des chifres 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 0. Ainsi quand ils veulent marquer 11. ils designent ce nombre par bb. quand ils veulent exprimer 59. ils le font par fu. Ils employent ces lettres de la même maniere qu'on a coutume d'employer les chifres ordinaires 1. 2. 3. &c. en sorte que ces caracteres b. o. n. &c. étans à la premiere place à droite, ne marquent que des unités ; mais quand ils se trouvent à la deuxiéme place, ils signifient des dixaines ; à la troisiéme ils expriment des centaines, & ainsi des autres ; de même que dans l'Arithmetique, où nous nous servons de caracteres Arabes,

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	0.
b.	o.	n.	e.	f.	a.	c.	i.	u.	s.

EXEMPLES.

11.12.13.14.24.25.36.48.59.60.112.&c.
bb. bo. bn. be. oe. of. na. ei. fu. af. bbo. &c.

PROBLEME V.

Soustraire par une seule opération plusieurs sommes de plusieurs autres sommes données.

56243	
84564	A
3252	
26848	
2942	
3654	B
2308	
162003	

POur ôter toutes les sommes d'en bas, qui sont au dessous de la ligne en B, de toutes les sommes d'en haut, qui sont au dessus de la ligne en A, on commencera à ajouter les nombres de la premiere colonne d'en bas à la droite, en disant 8 & 4 font 12, & 2 font 14, que l'on ôtera de la plus proche dixaine, c'est-à-dire, de deux dixaines, ou de 20 : le reste sera ajouté à la colonne correspondante de dessus, en disant 6 & 8 font 14, & 2 font 16, & 4 font 20, & 3 font 23, il faudra écrire 3 audessous; & parce qu'il y a ici deux dixaines comme auparavant, on ne retiendra rien. Ajoutez de la même façon les nombres de la colonne suivante d'en bas, en disant 0 & 5 font 5, & 4 font 9, qu'on ôtera de la plus proche dixaine, ou de 10 : le reste 1 sera ajouté à la colonne correspondante d'en haut, en disant 1 & 4 font 5, & 5 font 10, & 6 font 16, & 4 font 20, il faudra écrire 0 au dessous; & parce qu'il y a ici deux dixaines, & que dans la colonne d'en bas il n'y en

Digitized by Google

a eu qu'une, on retiendra la différence 1, qu'on ôtera de la colonne ſuivante d'en bas, à cauſe qu'on a trouvé plus de dixaines en A qu'en B; car il la faudroit ajouter, ſi l'on avoit trouvé moins de dixaines en A qu'en B. Quand il arrivera que cette différence ne pourra être ôtée de la colonne d'en bas, pour n'y avoir point de figures ſignificatives, comme il arrive ici à la cinquiéme colonne, on l'ajoutera à la colonne d'en haut, & l'on écrira toute la ſomme au deſſous de la ligne, de ſorte que dans cet exemple, l'on aura 162003, pour le reſte de la Souſtraction.

PROBLEME VI.

Multiplication abregée.

Pour multiplier un nombre quelconque, par exemple, 128 par un nombre qui ſoit produit par la multiplication de deux autres, comme par 24, qui eſt produit par la multiplication de ces deux 4, 6, ou de ces deux autres 3, 8; on multipliera le nombre propoſé 128 par 4, & le produit 512 par 6: ou bien on multipliera le nombre propoſé 128 par 3, & le produit 384 par 8, & l'on aura 3072 pour le produit de la multiplication qu'il falloit faire.

D'où il ſuit que pour multiplier un nombre propoſé par un nombre quarré, il faut multiplier le nombre propoſé par le côté de ce nombre quarré, puis multiplier le produit par le même côté. Comme pour multiplier 128 par 25, dont la Racine quarrée, ou le côté eſt 5, on multipliera 128 par 5, & le produit 640 encore par 5, & l'on aura 3200 pour le produit de la Multiplication.

Ainſi pour ſçavoir combien il y a de pieds quarrés en 32 toiſes quarrées, on multipliera 32 par 6, & le produit 192 encore par 6, & l'on aura 1152 pour le nombre des pieds quarrés qu'on cherche.

Pour multiplier un nombre quelconque, par exemple, 128 par un nombre qui ſoit produit par la Multiplication de trois autres, comme par 108, qui eſt produit par la Multiplication de ces trois 2, 6, 9, ou de ces trois 3, 6, 6; on multipliera le nombre propoſé 128 par 2, le produit 256 par 6, & le ſecond produit 1536 par 9. Ou bien l'on multipliera le nombre propoſé 128 par 3, le produit 384 par 6, & le ſecond produit 2304 encore par 6, & l'on aura 13824 pour le produit qu'il falloit trouver.

D'où il ſuit, que pour multiplier un nombre propoſé par un nombre cubique, il faut multiplier le nombre propoſé par le côté de ce nombre cubique, le produit par le même côté, & le ſecond produit encore par le même côté. Comme pour multiplier 128 par 125, dont la Racine cubique ou le côté eſt 5, on multipliera d'abord 128 par 5, puis le produit 640 encore par 5, enfin le ſecond produit 3200 par 5, & l'on aura 16000 pour le produit de 128 par 125. Ainſi pour ſçavoir combien il y a de pieds cubes en 32 toiſes cubes, on multipliera 32 par 6, enſuite le produit 192 auſſi par 6, enfin le ſecond produit 1152 encore par 6, & l'on aura 6912 pour le nombre des pieds cubes qu'on cherche.

Pour multiplier un nombre quelconque par telle puiſſance qu'on voudra de 5, on ajoutera au nombre propoſé vers la droite autant de zero que l'expoſant de la Puiſſance comprendra d'unités, comme un zero pour 5, deux zero pour ſon quarré 25,

Digitized by Google

trois zero pour son cube 125, & ainsi de suite. On divisera ce nombre ainsi augmenté par une semblable Puissance de 2, sçavoir par 2 pour 5, par 4 pour son quarré 25, par 8 pour son cube 125, & ainsi de suite.

Comme pour multiplier 128 par 5, on divisera 1280 par 2, & le quotient 640 sera le produit qu'on cherche. Mais pour multiplier 128 par 25 quarré de 5, on divisera 12800 par 4 quarré de 2, & le quotient donnera 3200 pour le produit. Si on veut multiplier le même nombre 128 par 125 cube de 5; on divisera 128000 par 8 cube de 2, & le quotient 16000 sera le produit cherché. On fera les mêmes opérations pour les autres Puissances comme on le voit dans la Table suivante, qui n'a été continuée que jusqu'à la 7e Puissance.

1280	12800	128000	1280000
5	25	125	625
2	4	8	16
640	3200	16000	80000

12800000	128000000	1280000000
3125	15625	78125
32	64	128
400000	2000000	10000000

Pour sçavoir combien valent 53 louis d'or à 15 livres le louis d'or, on écrira 53 sous 53, en l'avançant d'une colonne vers la gauche, en sorte que

53
53
———
583

le 3 réponde ſous le 5, & la ſomme de ces deux nombres ainſi diſpoſés, donnera 583 livres pour la valeur de 53 louis d'or, à 11 livres le louis d'or.

Pour ſçavoir combien valent 53 louis d'or à 12 liv. 10 ſ. le louis d'or, on prendra la huitiéme partie du nombre donné 53, augmenté de deux zero vers la droite, ſçavoir la huitiéme partie de 5300 conſideré comme 5300 livres, & l'on aura 662 liv. 10 ſ. pour la valeur de 53 louis d'or à 12 liv. 10 ſ. le louis d'or.

Pour ſçavoir combien valent 53 louis d'or à 12 liv. 5 ſ. le louis d'or, on multipliera 53 que l'on conſiderera comme 53 liv. par 7, & le produit 371 liv. encore par 7. Le quart du ſecond produit 2597 liv. donnera 649 liv. 5 ſ. pour la valeur de 53 louis d'or à 12 liv 5 ſ. le louis d'or.

Pour ſçavoir combien il y a de pouces en 53 pieds, il faut multiplier 53 par 12. Ce qui ſe peut faire en multipliant 53 par 2, & le produit 106 par 6; ou bien en multipliant 53 par 3, & le produit 159 par 4. Mais cela ſe peut faire ſans Multiplication, en écrivant 53 ſous 53, & encore une fois 53 en l'avançant d'une colonne, en ſorte que le 3 réponde ſous le 5; car la ſomme de ces trois nombres ainſi diſpoſés, donnera 636 pour le nombre des pouces qui ſont compris en 53 pieds. C'eſt auſſi le nombre des deniers qui ſont compris en 53 ſols.

53
53
53
———
636

Pour multiplier enſemble deux nombres compoſés de pluſieurs figures, par exemple 12 & 18, on réduira le premier nombre 12 en ces trois parties compoſées chacune d'une ſeule figure, 2, 4, 6

2	4— 8
	6—12
	8—16
4	4—16
	6—24
	8—32
6	4—24
	6—36
	8—48
somme	216

& pareillement le second nombre 18 en ces trois parties composées aussi chacune d'une seule figure 4, 6, 8, dont chacune sera multipliée par la premiere partie 2 du premier nombre, ensuite par la seconde figure 4 du même premier nombre; enfin par la troisiéme figure 6 du même premier nombre: la somme de tous les produits sera celui qui doit provenir de la multiplication de 12 par 18, ou de 18 par 12.

Multiplication par les doigts.

SI vous voulez multiplier 7 par 8, premierement prenez la différence de 7 à 10 qui est 3, & ayant levé les dix doigts des deux mains, abaissez trois doigts d'une main qui sera, par exemple, la gauche. Secondement, prenez la différence de 8 à 10, qui est deux, & abbaissez deux doigts de l'autre main qui sera la droite. Troisiémement, multipliez le nombre des doigts levés d'une main par le nombre des doigts levés de l'autre, le produit qui est 6, sera retenu pour être mis au rang des unités. Quatriémement, ajoutez le nombre des doigts abbaissés des deux mains, & la somme qui est ici 5, doit être placé au rang des dixaines. Ainsi on trouvera que 7 multiplié par 8 produit 56.

On voit, par cet exemple qu'il faut prendre la différence de 10 à chacun des deux nombres donnés, que le produit de ces deux différences, dési-

gnées par les doigts levés de chaque main, donnera le nombre des unités du produit total, & que la somme des doigts abbaissés donnera les dixaines de ce produit total.

Autre Multiplication abregée

SI l'on avoit un grand nombre à multiplier par un autre grand nombre, comme 453216 par 3289, il seroit bon de se servir de cette Méthode que nous avons tirée de Langius. Je choisis le plus petit de ces nombres 3289 pour le Multiplicateur, & je fais une Table à deux colonnes.

453216	1	453216
906432	2	3289
1359648	3	———
1812864	4	4078944
2266080	5	3625728
2719296	6	906432
3172512	7	1359648
4625728	8	———
4078944	9	1490627424

L'une de ces colonnes, qui est à droite, contient les premiers chifres de la numération 1. 2. 3. &c. jusqu'au plus grand chifre 9, qui se trouve dans le Multiplicateur 3289: ces chifres sont disposés les uns sous les autres; comme on le voit dans la Table. L'autre colonne contient le nombre à multiplier 453216, qui est placé vis-à-vis de l'unité. On a mis le double de ce nombre vis-à-vis de 2, le triple vis-à-vis de 3, & ainsi de suite jusqu'au plus haut chifre 9, qui est dans la seconde colonne.

Digitized by Google

Cette Table étant ainsi faite, on disposera le nombre à multiplier & le Multiplicateur l'un sous l'autre à l'ordinaire : comme le premier chifre du Multiplicateur est 9, on prendra le nombre qui lui répond dans la Table, & on l'écrira au dessous des nombres donnés : le second chifre étant 8, on prendra le nombre qui lui correspond dans la Table, & on l'écrira au-dessous du premier écrit, en observant de le reculer d'une place, parce que le 8 exprime des dixaines. On fera la même chose à l'égard des autres chifres qui se trouvent dans le Multiplicateur. Enfin on fera l'addition de ces nombres ; la somme donnera le produit des deux nombres proposés.

PROBLEME VII.

Division abregée.

Pour diviser un grand nombre par un plus petit, comme 1492862 par 432, il faudroit mettre, selon la méthode commune, le Diviseur 432 vers la gauche sous 1492, pour sçavoir combien de fois il y est contenu. Mais pour n'employer que l'addition & la soustraction, faites un tarif du diviseur 432 en le mettant vers la droite vis-à-vis de 1, & l'ajoutez à lui-même, pour avoir son double 864, que vous écrirez sous 432 vis-à-vis de 2. Puis ajoutez le même nombre 432 à son double 864, avoir son triple 1296, que vous écrirez en bas vis-à-vis de 3. Ajoutez pareillement le même diviseur 432 à son triple 1296, pour avoir son quadruple 1728, que vous écrirez dessous vis-à-vis de 4, & ainsi des autres, en écrivant toujours les multiples du diviseur 432, vis-à-vis des autres nombres 5, 6, 7, 8, 9, 10. Le der-

1	432	1492992	}	3456
2	864	1296 . . .		
3	1296			
4	1728	1969		
5	2160	1728		
6	2592			
7	3024	2419		
8	3456	2160		
9	3888			
10	4320	2592		
		2592		
		000		

nier 10 doit avoir vis-à-vis de lui le même diviſeur 432 augmenté d'un zero vers la droite, ſi le tarif eſt bien fait.

Cette préparation étant faite, pour ſçavoir tout d'un coup combien de fois le diviſeur 432 eſt contenu dans 1492, cherchez ce nombre dans le tarif, ou celui qui étant moindre, en approche le plus. C'eſt ici 1296, qui ſe trouvant à côté de 3, fait voir que 3 doit être la premiere figure du quotient. Si vous ôtez ce nombre 1296 de 1492, il reſtera 196. A ce reſte joignez vers la droite la figure 9 qui ſuit 1492 dans le dividende pour avoir 1969 que vous chercherez dans le tarif, ou celui qui étant moindre en approche le plus, & qui eſt ici 1728. Comme ce nombre ſe trouve à côté de 4, vous poſerez 4 pour la ſeconde figure du quotient. Enſuite vous ôterez ce nombre 1728 de 1969, & il reſtera 241. A ce reſte vous joindrez vers la droite la figure 9 qui ſuit 14929 dans le dividende pour avoir 2419 que vous chercherez

dans le tarif ou celui qui étant moindre, en approche le plus, & qui eſt ici 2160. Le nombre 5 qui eſt à côté du nombre 2160 ſera la troiſiéme figure du quotient. On continuera à faire les mêmes opérations qu'on vient de faire, juſqu'à ce que la diviſion ſoit achevée.

Cette maniere eſt très-commode, quand on a pluſieurs grands nombres à diviſer par un même nombre, parce qu'ayant fait un tarif du diviſeur, il ſert pour faire toutes les diviſions dont on a beſoin. C'eſt ce qui arrive aux Arpenteurs qui ont ſouvent de grands nombres à diviſer par 144, lorſqu'ils veulent réduire des pouces quarrées en pieds quarrés, ou par 1728, quand ils veulent réduire des pouces cubes en pieds cubes.

Pour diviſer un nombre quelconque par telle Puiſſance qu'on voudra de 5, on le multipliera par une ſemblable Puiſſance de 2. On retranchera du produit vers la droite autant de figures que le dégré de la Puiſſance contiendra d'unités. Les figures qui reſteront vers la gauche, ſeront le quotient, & celles qui auront été retranchées ſeront le numérateur d'une fraction, dont le dénominateur ſera une ſemblable Puiſſance de 10.

Comme pour diviſer 128 par 5, on retranchera le 6 qui eſt à la droite de 256, double de 128, & l'on aura $25\frac{6}{10}$ pour le quotient. Pour diviſer le même nombre 128 par 25 quarré de 5, on retranchera les deux dernieres figures 12 qui ſont à la droite de 512, quadruple de 128, & l'on aura $5\frac{12}{100}$ pour le quotient. Ainſi des autres.

Pour diviſer un nombre quelconque par un plus petit, qui ſoit produit par la multiplication de deux autres plus petits, on diviſera le nombre pro-

posé par l'un de ces deux plus petits nombres ; & le quotient sera divisé par l'autre nombre. Le second quotient sera celui qu'on cherche.

Comme pour diviser 20736 par 24, qui est produit par la multiplication de ces deux nombres 3, 8, aussi-bien que de ces deux, 4, 6, on prendra la huitiéme partie de son tiers, ou la sixiéme partie de son quart : ou bien, ce qui est la même chose, on prendra le tiers de sa huitiéme partie, ou le quart de sa sixiéme partie, & l'on aura 864 pour le quotient cherché.

D'où il suit que pour réduire en toises quarrées des pieds quarrés, on doit prendre la sixiéme partie de la sixiéme partie du nombre proposé des pieds quarrés, parce qu'une toise quarrée contient 36 pieds quarrés, & que 6 fois 6 font 36. Ainsi pour réduire en toises quarrées 20736 pieds quarrés, on prendra la sixiéme partie de la sixiéme partie 3456 de 20736, & l'on aura 576 pour le nombre des toises quarrées qui sont contenues en 20736 pieds quarrés. Pareillement pour réduire en toises quarrées 542 pieds quarrés, on prendra la sixiéme partie de la sixiéme partie $90\frac{2}{6}$ de 542, & l'on aura 15 toises quarrées & 2 pieds quarrés pour la valeur de 542 pieds quarrés.

PROBLEME VIII.

De quelques proprietés des Nombres.

I.

LE nombre 9 est tel, que s'il multiplie un nombre entier quelconque, la somme des figures du produit est divisible par le même nombre 9 sans reste. Si on multiplie, par exemple, 53 par 9, & qu'on

qu'on ajoute ensemble les figures du produit 477, la somme 18 est exactement divisible par 9.

II.

Si l'on prend deux nombres quelconques; l'un des deux, ou leur somme, ou leur différence est divisible par 3. Soient pris les deux nombres 6, 5, le premier 6 est divisible par 3. Si on choisit les deux nombres 11, 5, leur différence 6 est divisible par 3. Enfin si on prend les deux nombres 7, 5, leur somme 12 est divisible par 3.

III.

On peut diviser par 6 le produit de deux nombres, dont les quarrés ajoutés ensemble font un nombre quarré; ainsi 12, produit de ces deux nombres 3, 4, dont les quarrés 9, 16, ajoutez ensemble, font le nombre quarré 25, dont le côté est 5, est divisible par 6.

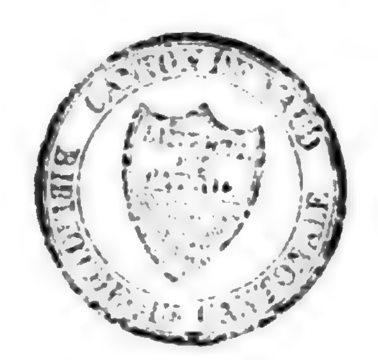
Pour trouver deux nombres, dont les quarrés fassent ensemble un nombre quarré, multipliez deux nombres quelconques. Le double de leur produit sera l'un des deux nombres qu'on cherche, & la différence de leurs quarrés sera l'autre nombre.

Comme si l'on multiplie ces deux nombres 2, 3, dont les quarrés sont 4, 9, le produit sera 6, dont le double 12, & la différence 5 des quarrés 4, 9, sont deux nombres tels que leurs quarrés 144, 25, font ensemble ce nombre quarré 169, dont le côté est 13. *Voyez les Problêmes 9 & 10.*

IV.

La somme & la différence de deux nombres quelconques, dont les quarrés different d'un nombre quarré, sont chacune ou un nombre quarré, ou la moitié d'un nombre quarré.

Ainsi 16, somme des deux nombres 6, 10,



dont les quarrés 36, 100, différent du nombre quarré 64, qui a 8 pour Racine quarrée, & leur différence 4 sont chacune un nombre quarré. De même 18 somme des deux nombres 8, 10, dont les quarrés 64, 100, différent du nombre quarré 36, qui a 6 pour Racine, & leur différence 2, sont les moitiés de ces deux nombres quarrés 36, 4.

Pour trouver deux nombres, dont la somme & la différence soient chacune un nombre quarré, auquel cas les quarrés de ces deux nombres différeront aussi d'un nombre quarré; choisissez deux nombres à volonté, comme 2, 3, dont le produit est 6, & dont les quarrés sont 4, 9. La somme 13 de ces deux quarrés, & le double 12 du produit 6, sont les deux nombres qu'on cherche. Car leur somme 25, & leur différence 1, sont chacun un nombre quarré: de plus leurs quarrés 169, 144, différent du nombre quarré 25, qui a 5 pour Racine quarrée.

Pour trouver deux nombres, dont la somme & la différence soient chacune la moitié ou le double d'un nombre quarré, auquel cas leurs quarrés differeront aussi d'un nombre quarré; choisissez à volonté deux nombres, comme 2, 3, dont les quarrés sont 4, 9. La somme 13 de ces deux quarrés, & leur différence 5 sont les deux nombres qu'on cherche. Car leur somme 18, & leur différence 8 sont les moitiés de ces deux nombres quarrés 36, 16, ou les doubles de ces deux autres nombres quarrés 9, 4: de plus leurs quarrés 169, 25, différent de ce nombre quarré 144, qui a 12 pour Racine quarrée.

V.

Tout nombre quarré finit par deux zeros, ou

Digitized by Google

par l'une de ces cinq figures, 1, 4, 5, 6, 9. Cette proposition sert *à faire connoître quand un nombre proposé n'est point quarré :* c'est lorsqu'il ne finit ni par deux zeros, ni par quelqu'une des cinq figures précédentes. Quand même il finiroit par deux zeros, on peut assurer qu'il n'est point quarré, lorsque ces deux zeros ne sont pas précédés de quelqu'une des cinq figures précédentes.

V I.

Toute Fraction quarrée, c'est-à-dire, qui a sa Racine quarrée, est telle que le produit du Numérateur par le Dénominateur a sa Racine quarrée. Cette proposition sert *à faire connoître quand une fraction proposée est quarrée :* c'est lorsqu'en multipliant le Numérateur par le Dénominateur, le produit est un nombre quarré.

Ainsi l'on connoît que cette fraction $\frac{28}{63}$ est quarrée, parce qu'en multipliant le Numérateur 28 par le Dénominateur 63, le produit 1764 est un nombre quarré, dont le côté est 42; alors la Racine quarrée de la Fraction proposée $\frac{28}{63}$ sera $\frac{42}{63}$, en retenant le même Dénominateur 63, ou bien $\frac{28}{42}$, en retenant le même Numérateur 20. Car l'une & l'autre de ces deur Fractions $\frac{28}{42}$, $\frac{42}{63}$, est égale à $\frac{2}{3}$, qui est la Racine quarrée de la Fraction proposée $\frac{28}{63}$, ou $\frac{5}{9}$.

VII.

Toute Fraction cubique, c'est-à-dire, qui a sa Racine cubique, est telle qu'en multipliant le Numérateur par le quarré du Dénominateur, ou le Dénominateur par le quarré du Numérateur, le

produit a sa Racine cubique. Cette proposition sert *à faire connoître quand une fraction proposée est cubique* : c'est lorsqu'en multipliant le Numérateur par le Dénominateur, ou le Dénominateur par le Numérateur, le produit est un nombre cubique.

Ainsi l'on connoît que cette Fraction $\frac{24}{375}$ est cubique, parce qu'en multipliant le Numérateur 24 par le quarré 140625 du Dénominateur 375, le produit 3375000 à sa Racine cubique 150; ou bien parce qu'en multipliant le Dénominateur 375 par le quarré 576 du Numérateur 24, le produit 216000 a 60 pour Racine cubique: alors la Racine cubique de la Fraction proposée $\frac{24}{375}$ sera $\frac{150}{315}$ en retenant le même Dénominateur 357; ou bien $\frac{24}{60}$, en retenant le même Numerateur 24. Car l'une & l'autre de ces deux Fractions $\frac{150}{375}$, $\frac{24}{60}$ est égale à $\frac{2}{5}$ qui est la Racine cubique de la Fraction proposée $\frac{24}{375}$, ou $\frac{8}{125}$.

VIII.

Quoiqu'il ne soit pas possible de trouver deux puissances homogenes, dont la somme & la difference soient chacune une semblable puissance, comme deux quarrés, dont la somme & la différence soient chacune un nombre quarré, ou deux cubes, dont la somme & la difference soient chacune un nombre cubique; néanmoins il est possible & même très-facile de *trouver deux nombres triangulaires, dont la somme & la différence soient chacune un nombre triangulaire.*

Voici deux nombres triangulaires 15, 21, dont les côtés sont 5 & 6: leur somme 36, & leur difference 6, sont aussi des nombres triangulaires, dont les côtés sont 8 & 3. Voici encore deux au-

Digitized by Google

tres nombres triangulaires 780, 990, dont les côtés ſont 39 & 44 : leur ſomme 1770, & leur différence 210, ſont auſſi des nombres triangulaires, dont les côtés ſont 59, 20. Si vous voulez encore deux autres nombres triangulaires, les voici ; 1747515, 2185095, dont les côtés ſont 1869, 2090 : leur ſomme 3932610, & leur différence 437580, ſont auſſi des nombres triangulaires, dont les côtés ſont 2804, 935.

On appelle *Nombre triangulaire* celui qui provient de la ſomme de quelques-uns des nombres naturels, 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. pris de ſuite en commençant par l'unité. On peut en prendre autant qu'on voudra, & le dernier de ceux qui ſeront pris, & qui ſera le plus grand, eſt appellé le *côté* du nombre triangulaire. Ainſi l'on connoît que ce nombre 10 eſt triangulaire, & que ſon côté eſt 2, parce qu'il eſt égal à la ſomme des quatres premiers nombres naturels 1, 2, 3, 4, dont le dernier & plus grand eſt 4. Il a été appellé *triangulaire*, parce que l'on peut diſpoſer 10 points en forme de Triangle équilateral, dont chaque côté en comprend 4 ; ce qui a fait dire que 4 étoit le côté du nombre triangulaire 10.

De même 21 eſt un nombre triangulaire, & ſon côté eſt 6, parce qu'il eſt égal à la ſomme des 6 premiers nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, 6, dont le dernier & le plus grand eſt 6. Ces nombres 55, 78 ſont des nombres triangulaires. Conſultez le Traité du Triangle Arithmétique par M. Paſcal.

Pour connoître ſi un nombre propoſé eſt Triangulaire, il faut le multiplier par 8, & ajouter 1 au produit, ſi cette ſomme a une Racine quarrée, le

nombre proposé sera triangulaire. Ainsi l'on connoît que ce nombre 10 est triangulaire, parce qu'étant multiplié par 8, & le produit 80 étant augmenté de 1, la somme 81 a pour Racine quarrée 9. On connoît aussi que ce nombre 3932610 est triangulaire, parce qu'étant multiplié par 8, & le produit 31460880 étant augmenté de 1, la somme 31460881 est un nombre quarré, dont la Racine est 5609.

Pour avoir le côté du nombre triangulaire, il faut prendre la plus petite moitié de la Racine trouvée. Ainsi pour avoir le côté du nombre triangulaire 10, prenez 4 la plus petite moitié de 9 Racine trouvée, & 4 sera le côté de 10. De même pour avoir le côté du nombre triangulaire 3932610, prenez la plus petite moitié de 5609 racine trouvée, & 2804 sera le côté du nombre triangulaire proposé.

IX.

La différence de deux Puissances homogénes; comme de deux nombres quarrés, de deux nombres cubiques &c. est divisible par la différence de leurs côtés. La différence 21 de ces deux quarrés 25, 4, dont les côtés sont 5, 2, est divisible par 3 différence de ces côtés; & le quotient 7 est égal à la somme des mêmes côtés. La différence 117 des deux cubes 125, 8, dont les côtés sont 5, 2, est divisible par 3 différences de ces côtés, & le quotient 39 est égal à la somme de 10 produit des côtés, 5, 2, & de 29, somme de leurs quarrés 25, 4.

X.

La différence de deux puissances homogenes,

dont l'exposant commun est un nombre pair, est divisible par la somme de leurs côtés. La différence 21 de ces deux quarrés 25, 4, dont les côtés sont 5, 2, est divisible par 7 somme de ces côtés; & le quotient 3 est égal à la différence des mêmes côtés. La différence 609 des deux quarrés-quarrés 625, 16, dont les côtés sont 5, 2, est divisible par 7 somme de ces côtés, & le quotient 87 est égal au produit sous la différence 3 des mêmes côtés 5, 2, & la somme 29 de leurs quarrés 15, 4.

XI.

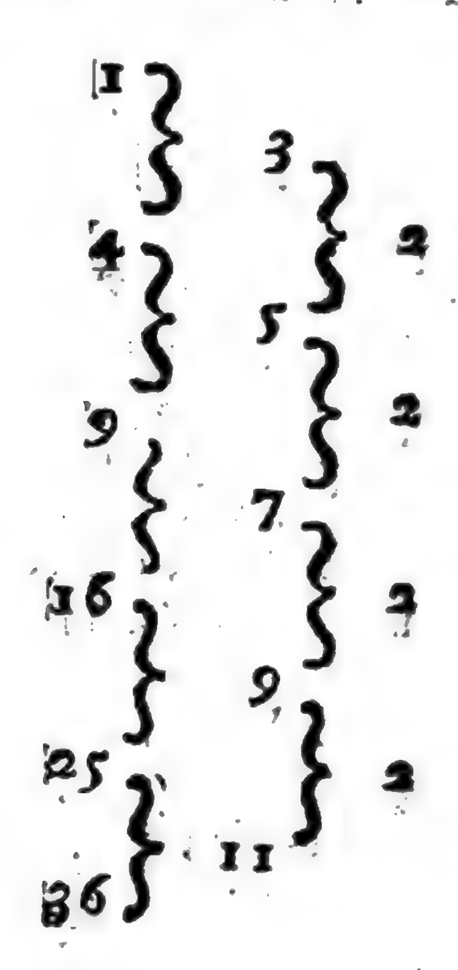
La somme de deux puissances homogenes, dont l'exposant commun est un nombre impair, est divisible par la somme de leurs côtés. La somme 133 des deux cubes 125, 8, dont les côtés sont 5, 2, est divisible par la somme 7 de ces côtés; & le quotient 19 est égal à l'excès de 29 somme des quarrés 25, 4, des côtés 5, 2, sur le produit 10 des mêmes côtés. La somme 3157 des deux sursolides 3125, 32, dont les côtés sont 5, 2, est divisible par la somme 7 de ces côtés; & le quotient 451 est égal à l'excès de la somme 741 des quarrés-quarrés 625, 16, des deux côtés 5, 2, & du quarré 100 du produit 10 sous les mêmes côtés, sur le produit 290 sous la somme 29 des quarrés 25, 4, des côtés 5, 2, & le produit 10 des mêmes côtés.

XII.

Toutes les puissances des nombres naturés 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. ont autant de différences que leurs exposans contiennent d'unités, les dernieres

différences étant toujours égales entre elles dans chaque puiſſance; ſçavoir, les ſecondes différences, c'eſt-à-dire, les differences des différences dans les quarrés 1, 4, 9, 16, 25, 36, &c. car ces ſecondes différences ſont 2, les premieres étant les nombres impairs 3, 5, 7, 9, 11, &c. Les troiſiémes différences, c'eſt-à-dire, les différences des différences des premieres différences dans les cubes 1, 8, 27, 64, 125, 216, &c. car ces troiſiémes différences ſont 6, les premieres étant 7, 19, 37, 61, 91, &c. & les ſecondes, ou les différences de ces différences étant 12, 18, 24, 30, &c. qui ſe ſurpaſſent de 6 qui eſt leur troiſiéme différence. Ainſi des autres.

Quarrés. 1res Diff. 2es Diff.



Digitized by

Cubes.	1res Diff.	2es Diff.	3es Diff.
1	7	12	6
8	19	18	6
27	37	24	6
64	61	30	
125	91		
216			

Il arrive la même chose aux nombres *Poligones*, qui se forment par une continuelle addition des nombres en progression arithmétique qu'on appelle *Gnomons*, dont le premier est l'unité, qui est virtuellement nombre polygone de toute espece; aux nombres *Pyramidaux*, qui sont formés par l'addition continuelle des nombres polygones considerés comme des Gnomons, dont le premier est toujours l'unité; & aux nombres *Pyramido-Piramidaux*, qui sont formés par l'addition continuelle des nombres Pyramidaux considerez comme des Gnomons, dont le premier est toujours l'unité.

Lorsque les Gnomons se surpassent de l'unité, comme 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. les nombres Po-

lygones 1, 3, 6, 10, 15, 21, &c. qui s'en forment sont appellés *Triangulaires*, dont la propriété est telle que chacun étant multiplié par 8, & le produit étant augmenté de l'unité, la somme est un nombre quarré. Ce qui peut servir *à faire connoître quand un nombre proposé est Triangulaire*, comme nous avons déja dit ailleurs. De plus la somme 9 du second & du troisiéme, en omettant le premier, est un nombre quarré. De même, en omettant les quatre premiers, la somme 36 du cinquiéme & du sixiéme, est un nombre quarré, & ainsi de suite: en sorte qu'en omettant à volonté, les premiers nombres Triangulaires, les deux, qui se suivent étant ajoutés, forment un quarré.

Article 8. p. 12.

Lorsque les Gnomons se surpassent de deux unités, comme les nombres impairs 1, 3, 5, 7, 9, 11, &c. les nombres Polygones 1, 4, 9, 16, 25, 36, &c. qui en sont formés, sont des *Nombres quarrés*.

Lorsque les Gnomons se surpassent de trois unités, comme 1, 4, 7, 10, 13, 16, &c. les nombres 1, 5, 12, 22, 35, 51, &c. qui en sont formés, sont appellés *Pentagones*, dont la propriété est telle que chacun étant multiplié par 24, & le produit étant augmenté de l'unité, la somme est un nombre quarré. Ce qui sert *à faire connoître quand un nombre proposé est Pentagone*. Ainsi des autres. Voyez Schooten dans ses *Sectiones Miscellaneæ*.

Pour trouver la somme de tant de nombres Triangulaires qu'on voudra, en commençant depuis l'unité; par exemple, de ces huit, 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, on multipliera le nombre déterminé 8 par le suivant 9, & le produit 72 encore par le suivant 10: puis l'on divisera le second

produit 720 par 6, & le quotient 120 ſera la ſomme qu'on cherche.

La ſomme de toutes ces Fractions infinies $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{15}$, $\frac{1}{21}$, &c. dont le Numérateur commun eſt 1, & les Dénominateurs 3, 6, 10, 15, 21, &c. ſont des nombres Triangulaires, vaut préciſément 1.

Pour trouver la ſomme de tant de nombres quarrés que l'on voudra depuis l'unité, par exemple de ces huit, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, on ôtera de 240 double de la ſomme 120 d'autant de nombres Triangulaires 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, le dernier nombre Triangulaire 36, & le reſte 204 ſera la ſomme qu'on cherche.

XIII.

Les cubes 1, 8, 27, 64, 125, 216, &c. des nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. ſont tels que le premier 1 eſt un nombre quarré, dont le côté 1 eſt le premier nombre Triangulaire : la ſomme 9 des deux premiers 1, 8, eſt un nombre quarré, dont le côté 3 eſt le ſecond nombre Triangulaire : la ſomme 36 des trois premiers 1, 8, 27, eſt un nombre quarré, dont le côté 6 eſt le troiſiéme nombre Triangulaire, & ainſi de ſuite. C'eſt pourquoi *pour trouver la ſomme de tant de nombres cubiques qu'on voudra depuis l'unité*, par exemple de ces ſix 1, 8, 27, 64, 125, 216, on prendra le quarré 441 du ſixieme nombre Triangulaire 21, qui ſera la ſomme qu'on cherche.

XIV.

Entre les nombres entiers, il n'y a que 2, qui ont

ajouté à lui-même, fasse le même nombre qu'étant multiplié par lui-même, sçavoir 4. Car tout autre nombre comme 5, étant ajoûté à lui-même, fait 10, & étant multiplié par lui-même fait 25.

Quoiqu'on ne puisse pas trouver deux nombres entiers, dont la somme soit égale à leur produit; on peut néanmoins en *trouver aisément deux en fractions, & mettre en raison donnée, dont la somme soit égale à leur produit.* C'est en divisant la somme des deux termes de la raison donnée par exemple, leur donner la raison de 2 à 3, on divisera séparément leur somme 5 par 2 & par 3, & l'on aura ces deux nombres $2\frac{1}{2}$ $1\frac{2}{3}$, qui ajoutés font que multipliés ensemble, sçavoir, $4\frac{1}{6}$.

X V.

Un nombre quelconque est la moitié de la somme de deux autres également éloignés de lui, l'un par défaut, & l'autre par excès : par exemple, 6 est la moitié de la somme 12 des deux nombres 5 & 7, qui en sont également éloignés, ou des deux nombres 4 & 8, qui en sont aussi également éloignés, &c.

X V I.

Le nombre 37 est tel, qu'étant multiplié par chacun de ces nombres 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, qui sont en progression arithmetique, tous les produits sont composés de trois figures semblables.

37	37	37	37	37	37	37	37	33
3	6	9	12	15	18	21	24	27
111	222	333	444	555	666	777	888	999

Digitized by Google

XVII.

Les deux nombres 5 & 6 ſont appellés *Spheriques*, parce que leurs Puiſſances finiſſent par les mêmes nombres. Par exemple, les puiſſances de 5; ſçavoir, 25 125, 625, &c. finiſſent par le même nombre 5. De même, les puiſſances de 6; ſçavoir, 36, 216, 1296, &c. finiſſent par le même nombre 6.

Le nombre 5 a cela de particulier, qu'étant multiplié par un nombre pair, comme par 8, le produit 40 ſe termine par un zero.

L'autre nombre 6 a cela auſſi de particulier, qu'il eſt le premier des nombres qu'on appelle *Parfaits*, parce qu'ils ſont égaux à la ſomme de leurs parties aliquotes; car ce nombre 6 eſt égal à la ſomme de ſes parties aliquotes, 1, 2, 3. Le nombre 28 eſt auſſi un nombre parfait, parce qu'il eſt égal à la ſomme de ces parties aliquotes 1, 2, 4, 7, 14.

Pour trouver autant de nombres parfaits qu'on voudra, il faut ſe ſervir de la progreſſion double, dont le premier terme ſoit 2, & non pas l'unité, en écrire les termes de ſuite, & les ſéparer de deux en deux, avec cette précaution, que le ſecond terme 4, ſera repeté dans la ſeconde ſéparation, & y tiendra la premiere place, après avoir tenu la ſeconde place dans la premiere ſéparation, comme vous le voyez ici. Ces termes étant ainſi ſéparés.

2, 4	4, 8	16, 32	64, 128
6	28	496	8128
3 par 2	7 par 4	31 par 16	127 par 64

256, 512	1024, 2048	&c.
130816	209628	&c.

on les prendra deux à deux dans leurs ſéparations, & après avoir diminué de l'unité celui qui tient la ſeconde place dans chaque ſéparation, on les multipliera par celui qui tient la premiere place dans la même ſéparation ; le produit ſera un nombre parfait. Ainſi pour avoir le premier nombre parfait, on conſiderera que la premiere ſéparation contient ces deux termes 2, 2, 4, on ôtera 1 de 4, & l'on multipliera le reſte 3 par 2 ; le produit 6 eſt le premier nombre parfait. De même, pour avoir le ſecond nombre parfait, on conſiderera que la ſeconde ſéparation contient ces deux termes 4, 8, on ôtera 1 de 8, & l'on multipliera le reſte 7 par 4 ; le produit 28 ſera le ſecond nombre parfait ; on multipliera enſuite 31 par 16 pour avoir le troiſiéme nombre parfait ; & ainſi des autres.

REMARQUE.

Les nombres parfaits ſont ſi rares, qu'il ne s'en trouve qu'un depuis un juſqu'à dix, un depuis dix juſqu'à cent, un depuis cent juſqu'à mille, un depuis mille juſqu'à dix mille, un depuis dix mille juſqu'à cent mille, &c. De plus, il eſt à remarquer, que tous les nombres parfaits ont alternativement pour leur derniere figure 6 & 8.

Pour trouver toutes les parties aliquotes, ou tous les diviſeurs d'un nombre, il faut diviſer ce nombre & ſes quotiens par les nombres premiers, juſqu'à ce que le dernier quotient ſoit l'unité. Enſuite on multipliera ces diviſeurs premierement trouvés, de

Digitized by Google

la maniere qu'on l'enſeignera, pour avoir tous les autres.

Soit propoſé le nombre 210, dont on veut avoir tous les diviſeurs, ou toutes les parties aliquotes. Diviſez 210 par 2, il viendra au quotient

210	105	35	7	1
2	3	5	7	

105, que vous diviſerez par 3; puis vous diviſerez le ſecond quotient 35 par 5, qui donnera 7 pour troiſiéme quotient, lequel n'a point d'autre diviſeur que lui-même, & le quotient eſt l'unité.

Diſpoſez tous ces diviſeurs de la maniere que vous le voyez dans la Table ſuivante, en commençant par le nombre 2. Mettez enſuite le nombre 3 au-deſſous, mais rangez un peu à côté. Vous

2

3. 6.

5. 10. 15. 30.

7. 14. 21. 42. 35. 70. 105. 210.

multiplierez ces deux nombres 2, 3, & vous écrirez le produit 6 à côté de 3, & dans le même rang, comme vous le voyez. Ces nombres 2, 3, 6, ſeront des diviſeurs de 210. Puis mettez le nombre 5 troiſiéme diviſeur au-deſſous & un peu à côté, multipliez-le par tous les diviſeurs déja trouvés, & vous aurez pour diviſeurs nouveanx 10, 15, 30. Enfin poſez le nombre 7 au-deſſous & un peu à côté; multipliez-le par tous les diviſeurs déja trouvés, & vous aurez encore pour diviſeurs

14, 21, 42, 35, 70, 105, 210. Tous ces nombres pris pour diviſeurs, ou trouvés dans les deux Tables précédentes, joints à l'unité, ſeront les diviſeurs cherchés, & les parties aliquotes cherchées, ſi on en retranche le nombre propoſé 210.

On a diſpoſé les deux Tables précédentes & les ſuivantes, comme on le voit, pour donner plus de lumiere dans une opération qui eſt aſſez abſtraite d'elle même.

Si vous voulez trouver tous les diviſeurs, ou les parties aliquotes de 2032, diviſez d'abord ce nombre par 2 premier nombre premier, & tous les quotiens qui peuvent l'être, comme vous le voyez dans la Table ſuivante. Le dernier quotient

2032	1016	508	254	127	1
2	2	2	2	127	

127 étant nombre premier ne peut être diviſé que par lui-même, & il a pour quotient l'unité.

Diſpoſez tous ces diviſeurs de la maniere que vous le voyez dans la Table ſuivante pour trouver les autres. Après avoir mis le premier diviſeur 2, mettez le même 2, qui eſt ſecond diviſeur au-deſſous, & à côté multipliez ces deux diviſeurs 2, 2, & vous aurez 4, que vous rangerez à côté, comme dans cette Table. Poſez encore 2 au-deſ-

2.

2. 4.

2. 8.

2. 16.

127. 254. 508. 1016. 2032.

ſous

sous : suivant la regle précédente il faudroit multiplier tous les diviseurs trouvés par ce troisiéme diviseur 2 ; mais il est inutile de multiplier 2 par 2, qui donneroit encore 4 déja trouvé : ainsi on néglige cette multiplication, & on multiplie seulement 4 par 2, pour avoir 8, qui est un nouveau diviseur.

Ensuite vous écrirez au dessous pour la quatriéme fois le diviseur 2, & vous vous contenterez de multiplier 8 par ce nombre 2 : ce qui donne 16 ; car il est inutile de multiplier tous les 2 précédens, puisqu'ils donneroient pour produits 4 qui a déja été trouvé. (On observera la même chose à l'égard des autres nombres, dont la multiplication ne donneroit point de nouveau diviseur.)

Enfin vous poserez 127 au dessous des diviseurs, & à côté, vous multiplierez ce nombre une fois seulement par 2, & par tous les autres diviseurs trouvés, & vous aurez 254, 508, 1016, 2032. Tous ces nombres pris pour diviseurs, ou trouvés dans la Table précédente, seront les diviseurs cherchés, & les parties aliquotes cherchées, si on en retranche le nombre proposé 2032.

On peut s'exercer sur les nombres 8128 & 2096128, qui sont des nombres parfaits. On remarquera que toutes les puissances de 2 prises autant de fois que 2 est diviseur, sont des diviseurs, & parties aliquotes de ces deux nombres, & que la somme de ces puissances & de l'unité est égale au dernier nombre premier, qui se trouve être 127 dans 8128, & 2047 dans 2096128.

Autre maniere de trouver les parties aliquotes, ou tous les diviseurs d'un nombre proposé.

Soit proposé le nombre 8128, l'unité est tou-

jours un diviſeur de quelque nombre que ce ſoit : ainſi vous la mettrez à la tête d'une premiere colonne, qui contiendra une partie des parties aliquotes ou diviſeurs. Diviſez enſuite ce même nombre 8128 par le plus petit nombre qui ſe préſentera, ſçavoir par 2, que l'on peut connoître aiſément, parce que le nombre propoſé 8128 eſt pair, & le quotient ſera 4064, que vous écrirez à la droite, vis-à-vis le 2 dans une ſeconde colonne, pour ſecond diviſeur, qui ſe peut encore diviſer par le premier diviſeur 2 ; ce qui fait que ſon quarré 4 ſera auſſi un diviſeur, que vous écrirez au-deſſous de ſon côté 2, & vis-à-vis le ſecond quotient 2032 pour un autre diviſeur, qui ſe peut encore diviſer par le premier diviſeur 2, ce qui fait ſon cube 8 qui ſera auſſi un diviſeur, que vous écrirez au deſſous du quarré 4, & vis-à-vis le troiſiéme quotient 1016, pour un autre diviſeur, & ainſi de ſuite, juſqu'à ce qu'on ſoit parvenu à un dernier diviſeur, qui ne ſe puiſſe plus diviſer par le premier 2, comme il arrive au ſixiéme quotient 127, qui étant un nombre premier, fait connoître que tous les diviſeurs du nombre propoſé 8128 ſont trouvés, ou vous voyez que leur ſomme eſt égale à ce nombre, & que par conſéquent il eſt parfait.

1	
2	4064
4	2032
8	1016
16	508
32	254
64	127
127	8001
	127
	8128

C'eſt de la même façon que nous avons trouvé tous les diviſeurs de cet autre nombre 2096128, qui eſt auſſi parfait, parce qu'il eſt égal à la ſomme de ſes parties aliquotes : où l'on voit que le dernier

quotient 2047, qui répond à la dixiéme puissance 1024 du premier diviseur 2, est aussi un nombre

1	
2	1048064
4	524032
8	262016
16	131008
32	65504
64	32752
128	16376
256	8188
512	4094
1024	2047
2047	2094081
	2047
	2096128

premier : car s'il avoit pû être divisé par quelque autre nombre que par 2, comme par 3, il auroit fallu multiplier par ce nouveau diviseur 3, toutes les puissances du premier diviseur 2, & diviser le nombre proposé & tous les quotiens par ce même nouveau diviseur 3, pour avoir d'autres diviseurs, &c. comme vous allez voir dans l'exemple suivant.

XVIII.

Le nombre 120 est égal à la moitié de la somme 240 de ses parties aliquotes 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60. Le nombre 672 est aussi égal à la moitié de la somme 1344 de ses parties aliquotes, que nous avons

trouvées par une Méthode ſemblable à la précédente, ſans qu'il ſoit beſoin de la repeter davantage. On peut trouver une infinité d'autres nombres qui auront la même proprieté : on peut même en trouver d'autres qui ſeront la troiſiéme partie, ou telle autre partie qu'on voudra de la ſomme de leurs parties aliquotes ; mais ce n'eſt pas ici le lieu d'en dire davantage.

1	
2	336
4	168
8	84
16	42
32	21
3	224
6	112
12	56
24	28
48	14
96	7
252	1092
	252
	1344

XIX.

Ces deux nombres 220, 284, ſont appellés *Amiables*, parce que par le premier 220 eſt égal à la ſomme des parties aliquotes 1, 2, 4, 71, 142, du ſecond 284, & réciproquement le ſecond 284 eſt égal à la ſomme des parties aliquotes 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110 du premier 220. Ces parties aliquotes ſont faciles à trouver par ce qui a été enſeigné auparavant.

Pour trouver tous les nombres amiables par ordre, ſervez-vous du nombre 2, qui eſt tel que ſi de ſon triple 6, de ſon ſextuple 12, & de l'octodecuple 72 de ſon quarré 4, on ôte l'unité, il reſte ces trois nombres premiers 5, 11, 71, dont les deux premiers 5, 11, étant multipliés enſemble, & leur produit 55 étant multiplié par le double 4 du nombre 2, ce ſecond produit 220 ſera le premier des deux nombres qu'on cherche. Et pour

Digitized by Google

avoir l'autre qui eſt 284, on multipliera le troiſiéme nombre premier 71 par le même double 4 du nombre 2 pris au commencement.

2	2	4
3	6	18
6	12	72
1	1	1
5	11	71
	5	4
	55	284
	4	
	220	

Pour trouver deux autres nombres amiables, au lieu de 2, ſervez-vous d'une de ſes puiſſances qui

8	8	64
3	6	18
24	48	1152
1	1	1
23	47	1151
	23	16
	1081	18416
	16	
	17296	

eſt la même propriété tel qu'eſt ſon cube 8. Car

ſi de ſon triple 24, de ſon ſextuple 48, & de l'octodecuple 1152 de ſon quarré 64, on ôte l'unité, il reſte ces trois nombres premiers 23, 47, 1151, dont les deux premiers 23, 47, doivent être multipliés enſemble, & leur produit 1081 doit être encore multiplié par le double 16 du cube 8, afin d'avoir 17296 pour le premier des deux nombres qu'on cherche. Et pour avoir l'autre, qui eſt 18416, on multipliera le troiſiéme nombre premier 1151 par le même double 16 du cube 8.

Si vous voulez deux autres nombres, au lieu de deux, ou de ſon cube 8, ſervez-vous de ſon quarré-cube 64, qui a la même propriété. Car ſi de ſon triple 192, de ſon ſextuple 384, & de l'octodecuple 73728 de ſon quarré 4096, on ôte l'unité, il reſte ces trois nombres premiers 191, 383, 73727, par le moyen deſquels, & parce qui a été dit auparavant, on trouvera ces deux autres nom-

64	64	4096
3	6	18
192	384	73728
1	1	1
191	383	73727
	191	128
	73153	943705
	128	
	9363584	

bres 9363584, 9437056, qui ſont amiables, ainſi des autres. Conſultez ce qui a été dit ſur les

Digitized by Google

parties aliquotes au livre troisiéme des nouveaux Elemens d'Algebre, tant dans les Problêmes, que dans les Questions. Consultez aussi Schooten dans ses *Sectiones Miscellaneæ*.

Regle générale pour trouver tant de nombres amiables qu'on voudra.

FAites une Table qui contiendra plusieurs rangs de nombres. Commencez par le second de ces rangs, qui doit contenir la progression double *, dont le premier terme sera 2. Triplez les termes de cette progression ; ces nombres triples 6, 12, 24, &c. placés chacun sous celui dont il est formé, composeront le troisiéme rang. Ces nombres diminués de l'unité 5, 11, 23, &c. & placez chacun au dessus du terme qui lui répond, composeront le premier rang. Enfin l'on aura les termes du quatriéme rang 71, 287, &c. en multipliant 12, second terme du troisiéme rang par 6, premier terme de ce même rang, le produit 72 diminué de l'unité, qui est 71, sera le premier terme du quatriéme rang, & on le placera sous 12. On multipliera ensuite 24, troisiéme terme, par le précédent 12, & le produit 288 diminué de l'unité qui est 287, sera le second terme du quatriéme rang. On trouvera les autres termes par la même mé-

* Voyez le Probl. II.

5	11	23	47	95	191
2	4	8	16	32	64
6	12	24	48	96	192
	71	287	1151	4607	18431

thode, c'est-à-dire, en multipliant un terme du troisiéme rang par celui qui le précéde immédiate-

ment dans ce même rang, & en plaçant le produit diminué de l'unité au dessous du terme qu'on a choisi dans le troisiéme rang, pour le multiplier avec le précédent.

Cette Table étant ainsi construite, on choisira trois nombres premiers, dont l'un sera pris dans le quatriéme rang; les autres seront pris dans le premier rang: l'un de ceux-ci doit répondre au nombre premier choisi du quatriéme rang, c'est-à-dire, celui qui est placé dans le premier rang au dessus du nombre premier choisi dans le quatriéme rang: l'autre sera celui qui précéde immédiatement dans le premier rang le second dont on vient de parler. Par exemple, si l'on choisit dans le quatriéme rang le nombre 71, celui qui lui répond dans le premier rang est 11, & 5 est celui qui précede immédiatement 11; ces nombres 5 & 11 étant nombres premiers, seront les termes avec lesquels on trouvera deux nombres *amiables*, en suivant ce qu'on va dire. Multipliez 71 par 4, terme qui lui répond dans le second rang; le produit 284, est l'un de ces nombres amiables. Multipliez aussi 11 par le même terme 4, qui lui répond dans le second rang, & le produit 44 par 5, terme qui précède immediatement 11 dans le premier rang; ce second produit 220 sera l'autre des nombres amiables que l'on cherche. On trouvera d'autres nombres amiables, en suivant la même méthode.

REMARQUES.

Si on choisissoit 4607 dans le quatriéme rang pour un des nombres premiers, on trouveroit que 95, qui lui répond dans le premier rang, n'est point un nombre premier: ainsi on ne pourroit

point ſe ſervir de ce terme pour choiſir des nombres amiables.

Comme il eſt difficile de connoître ſi un nombre eſt premier, quand il eſt un peu grand, nous ajouterons à la fin de ce Problême une Table de tous les nombres premiers, qui ſont compris entre 1 & 10000.

XX.

Les quarrés 961, 1156, des deux nombres 31, 34. ſont tels que le premier 961 avec ſes parties aliquotes 1, 31, fait une ſomme 993 égale à la ſomme des parties aliquotes, 1, 2, 4, 17, 34, 68, 289, 578, du ſecond 1156 dont le côté eſt 34.

XXI.

Les deux nombres ſuivans 26, 20, ſont tels que chacun avec ſes parties aliquotes fait une même ſomme. Car le premier 26 avec ſes parties aliquotes 1, 2, 13, fait 42, & le ſecond 20 avec ſes parties aliquotes 1, 2, 4, 5, 10, fait auſſi 42.

Il arrive la même choſe aux deux nombres 488, 464, dont chacun avec ſes parties aliquotes fait 930 : aux deux nombres 11, 6, dont chacun avec ſes parties aliquotes fait 12 : & aux deux nombres 17, 10, dont chacun avec ſes parties aliquotes fait 18.

On peut même avoir trois nombres, dont chacun avec ſes parties aliquotes fera une même ſomme, comme 20, 26, 41, dont chacun avec ſes parties aliquotes fait 42 : 23, 14, 15, dont chacun avec ſes parties aliquotes fait 24, & 46, 55, 71, dont chacun avec ſes parties aliquotes fait 72.

Ces deux quarrés 106276, 165649 ont pour racines 326, 407. La ſomme des diviſeurs de cha-

cun eſt 187131. Les diviſeurs de 106276 ſont, 1, 2, 4, 163, 326, 652, 26569, 53138, 106276. Ceux de 165649 ſont 1, 11, 37, 121, 407, 1369, 4477, 15059, 165649.

Ces deux quarrés 16, 25 ſont auſſi tels que la ſomme des diviſeurs de chacun eſt 31. Les diviſeurs de 16 ſont 1, 2, 4, 8, 16. Ceux de 25 ſont 1, 5, 25 : ainſi chacun avec leurs parties aliquotes fait 31.

Par le moyen de ces deux derniers quarrés 16, 25, on en peut avoir autant d'autres qu'on voudra qui ayent la même proprieté. Il ne faut que les multiplier par quelqu'autre nombre quarré impair qui ne ſoit pas diviſible par 5. Comme ſi on les multiplie chacun par 9, on aura ces deux autres nombres quarrés 144, 225, dont chacun avec ſes parties aliquotes fait 403 ; ou, ce qui eſt la même choſe, la ſomme des diviſeurs eſt 403.

XXII.

Le nombre quarré 81, dont la racine eſt 9, eſt tel qu'avec ſes parties aliquotes 1, 3, 9, 27, il fait ce nombre quarré 121, dont la racine eſt 11. Le nombre quarré 400, dont la racine eſt 20, eſt auſſi tel, qa'avec ſes parties aliquotes 1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 25, 40, 50, 80, 100, 200, il fait ce nombre quarré 961, dont la racine eſt 31.

XXIII.

La ſomme 666 de ces trois nombres Triangulaires 15, 21, 630, dont les côtés ſont 5, 6 ; 35, eſt auſſi un nombre Triangulaire dont le côté eſt 36. Il arrive la même choſe à ces trois autres

Digitized by Google

nombres Triangulaires 210, 780, 1711, dont les côtés ſont 20, 39, 58. Car leur ſomme 2701 eſt un nombre Triangulaire, dont le côté eſt 73. La ſomme 9180 de ces trois autres nombres Triangulaires 666, 2628, 5886, dont les côtés ſont 36, 72, 108, eſt auſſi un nombre Triangulaire, dont le côté eſt 135, &c.

XXIV.

Le quarré 49 du nombre 7, eſt tel que la ſomme 8 de ſes parties aliquotes 1, 7, a pour racine cubique 2. Et le cube 343 du même nombre 7, eſt tel qu'avec ſes parties aliquotes 1, 7, 49, il fait ce nombre quarré 400, dont le côté eſt 20.

XXV.

Le quarré 9 du nombre 3, eſt tel, que la ſomme 4 de ſes parties aliquotes 1, 3, eſt un nombre quarré, dont le côté eſt 2. Le quarré 2401 du nombre 49, a la même proprieté. Car la ſomme 400 de ſes parties aliquotes 1, 7, 49, 343, eſt un nombre quarré, dont la racine eſt 20.

XXVI.

Les deux nombres 99, 63, ſont tels que la ſomme 57 des parties aliquotes 1, 3, 9, 11, 33, du premier 99, ſurpaſſe la ſomme 41 des parties aliquotes 1, 3, 7, 9, 21, du ſecond 63, de ce nombre quarré 16, dont la racine eſt 4. Il arrive le même choſe à ces deux autres nombres 325, 175. Car la ſomme 109 des parties aliquotes 1, 5, 13, 25, 65, du premier 325, ſurpaſſe la ſomme 73 des

parties aliquotes 1, 5, 7, 25, 35, du second 175, de ce nombre quarré 36, dont la racine est 6.

XXVII.

La somme de deux nombres qui différent de l'unité est égale à la différence de leurs quarrés : & la somme des quarrés de leurs nombres Triangulaires est aussi un nombre Triangulaire. La somme 11 de ces deux nombres 5, 6, qui different de l'unité, est égale à la différence de leurs quarrés 25, 36 ; & leurs nombres Triangulaires 15, 21, sont tels que la somme 666 de leurs quarrés 225, 441, est aussi un nombre Triangulaire, dont le côté est 36.

XXVIII.

Les deux nombres triangulaires 6, 10 des deux nombres 3, 4, qui different aussi de l'unité, sont tels que leur somme 16, & leur différence 4, sont des nombres quarrés, dont les racines sont 4, 2, & que la somme 136 de leurs quarrés 36, 100, est un nombre Triangulaire, dont le côté 16 est aussi un nombre quarré, dont la racine 4 est encore un nombre quarré, dont la racine est 2.

Il arrive la même chose à ces deux autres nombres Triangulaires 36, 45, dont les côtés 8, 9, différent aussi de l'unité. Car leur somme 81, & leur différence 9, sont des nombres quarrés, dont les racines sont 9, 3. Et la somme 3321 de leurs quarrés 1296, 2025, est un nombre Triangulaire, dont le côté est 81, qui a pour racine quarrée 9, laquelle a aussi sa racine quarrée 3.

Il y a une infinité de couplets d'autres nombres Triangulaires, qui ont la même proprieté. On les

Digitized by Google

trouvera en ôtant & en ajoutant un nombre quarré quelconque à ſon quarré, & les moitiés du reſte & de la ſomme ſeront les deux nombres Triangulaires qu'on cherche. Les côtés de ces nombres Triangulaires ainſi trouvés différeront, entr'eux de l'unité.

Comme ſi l'on ôte & qu'on ajoute ce nombre quarré 16 à ſon quarré 256, les moitiés du reſte 240, & de la ſomme 272, donneront 120, 136, pour les deux nombres Triangulaires qu'on cherche, dont les côtés 15, 16, different de l'unité. Voyez l'Article VIII.

Ces deux nombres Triangulaires ainſi trouvés, ſont encore tels que le plus grand de leurs côtés eſt toujours un nombre quarré; que la différence de leurs quarrés eſt auſſi un nombre quarré: que leur ſomme enfin eſt un quarré-quarré, qui eſt égal au quarré de leur différence, & au côté du nombre Triangulaire que compoſe la ſomme de leurs quarrés.

Si vous voulez connoître les côtés de ces nombres Triangulaires 120, multipliez-le par 8, & au produit ajoutez l'unité, la ſomme ſera 961; tirez-en la racine quarrée qui ſera 31, prenez la plus petite moitié de cette racine 31 qui eſt 15; ce ſera le côté du nombre Triangulaire 120. Faites la même choſe à l'égard de 136 & de tous les autres nombres Triangulaires, dont vous voudrez trouver le côté. Voyez l'article VIII. p. 20.

XXIX.

La différence des quarrés de deux nombres en raiſon double eſt égale à la ſomme de leurs cubes, diviſée par la ſomme des deux nombres: & la mê-

me ſomme des cubes eſt le tiers d'un cube.

Si on prend les deux nombres 4, 8, qui ſont en raiſon double, la différence 48 de leurs quarrés 16, 64, eſt égale au quotient qui vient en diviſant la ſomme 576 de leurs cubes 64, 512, par la ſomme 12 des deux nombres : & la même ſomme 576 des cubes eſt le tiers de ce cube 1728, dont le côté 12 eſt toujours égal à la ſomme des deux nombres.

Je n'aurois jamais fait, ſi je voulois mettre ici toutes les proprietés des nombres, qui ſont infinies. C'eſt pourquoi je finirai ce Problême par la Table des nombres premiers, que j'ai promiſe.

Digitized by Google

Table des nombres premiers entre 1 & 10000.

2	167	383	614	881	1129	1429	1693	1993	2273	2557
3	173	389	619	883	1151	1433	1697	1997	2281	2579
5	179	397	631	887	1153	1439	1699	1999	2287	2591
7	181	—	641	—	1163	1447	—	—	2293	2593
11	191	401	643	907	1171	1451	1709	2003	2297	—
13	193	409	647	911	1181	1453	1721	2011	—	2609
17	197	419	653	919	1187	1459	1723	2017	2309	2617
19	199	421	659	929	1193	1471	1733	2027	2311	2621
23	—	431	661	937	—	1481	1741	2029	2333	2633
29	211	433	673	941	1201	1483	1747	2039	2339	2647
31	223	439	677	947	1213	1487	1753	2053	2341	2657
37	227	443	683	953	1217	1489	1759	2063	2347	2659
41	229	449	691	967	1223	1493	1777	2069	2351	2663
43	233	457	—	971	1229	1499	1783	2081	2357	2671
47	239	461	701	977	1231	—	1787	2083	2371	2677
53	241	463	709	983	1237	1511	1789	2087	2377	2683
59	251	467	719	991	1249	1523	—	2089	2381	2687
61	257	479	727	997	1259	1531	1801	2099	2383	2689
67	263	487	733	—	1277	1543	1811	—	2389	2693
71	269	491	739	1009	1279	1549	1823	2111	2393	2699
73	271	499	743	1013	1283	1553	1831	2113	2399	—
79	277	—	751	1019	1289	1559	1847	2129	—	2707
83	281	503	757	1021	1291	1567	1861	2131	2411	2711
89	283	509	761	1031	1297	1571	1867	2137	2417	2713
97	293	521	769	1033	—	1579	1871	2141	2423	2719
—	—	533	773	1039	1301	1583	1873	2143	2437	2729
101	307	541	787	1049	1303	1597	1877	2153	2441	2731
103	311	547	797	1051	1307	1601	1879	2161	2447	2741
107	313	557	—	1061	1319	1607	1889	2179	2459	2749
109	317	563	811	1063	1321	1609	—	—	2467	2753
113	331	569	821	1069	1327	1613	1901	2203	2473	2767
127	337	571	823	1087	1361	1619	1907	2207	2477	2777
131	347	577	827	1091	1367	1621	1913	2213	—	2789
137	349	587	829	1093	1373	1627	1931	2221	2503	2791
139	353	593	839	1097	1381	1637	1933	2237	2521	2797
149	359	599	853	—	1399	1657	1949	2239	2531	—
151	367	—	857	1103	—	1663	1951	2243	2539	2801
157	373	601	859	1109	1409	1667	1973	2251	2543	2803
163	379	607	863	1117	1423	1669	1979	2267	2549	2819
		613	877	1123	1427		1987	2269	2551	2833

Table des nombres premiers, entre 1 & 10000.

2837	3187	3499	3797	4111	4451	4789	5101	5449	5791
2843	3191	3511	3803	4127	4457	4793	5107	5471	5801
2851	3203	3517	3821	4129	4463	4799	5113	5477	5807
2857	3209	3527	3823	4133	4481	4801	5119	5479	5813
2861	3217	3529	3833	4139	4483	4813	5147	5483	5821
2879	3221	3533	3847	4153	4493	4817	5153	5501	5827
2887	3229	3539	3851	4157	4507	4831	5167	5503	5839
2897	3251	3541	3853	4159	4513	4861	5171	5507	5843
2903	3253	3547	3863	4177	4517	4871	5179	5519	5849
2909	3257	3557	3877	4201	4519	4877	5189	5521	5851
2917	3259	3559	3881	4211	4523	4889	5197	5527	5857
2927	3271	3571	3889	4217	4547	4903	5209	5531	5861
2939	3299	3581	3907	4219	4549	4909	5227	5557	5867
2953	3301	3583	3911	4229	4561	4919	5231	5563	5869
2957	3307	3593	3917	4231	4567	4931	5233	5569	5879
2963	3313	3607	3919	4241	4583	4933	5237	5573	5881
2969	3319	3613	3923	4243	4591	4937	5261	5581	5897
2971	3323	3617	3929	4253	4597	4943	5273	5591	5903
2999	3329	3623	3931	4259	4603	4951	5279	5623	5923
3001	3331	3631	3943	4261	4621	4957	5281	5639	5927
3011	3343	3637	3947	4271	4637	4967	5297	5641	5939
3019	3347	3643	3967	4273	4639	4969	5303	5647	5953
3023	3359	3659	3989	4283	4643	4973	5309	5651	5981
3037	3361	3671	4001	4289	4649	4987	5323	5653	5987
3041	3371	3673	4003	4297	4651	4993	5333	5657	6007
3049	3373	3677	4007	4327	4657	4999	5347	5659	6011
3061	3389	3691	4013	4337	4663	5003	5351	5669	6029
3067	3391	3697	4019	4339	4673	5009	5381	5683	6037
3079	3407	3701	4021	4349	4679	5011	5387	5689	6043
3083	3413	3709	4027	4357	4691	5021	5393	569.	6047
3089	3433	3719	4049	4363	4703	5023	5399	5701	6053
3109	3449	3727	4051	4373	4721	5039	5407	5711	6067
3119	3457	3733	4057	4391	4723	5051	5413	5717	6073
3121	3461	3739	4073	4397	4729	5959	5417	5737	6079
3137	3463	3761	4079	4409	4733	5077	5419	5741	6089
3163	3467	3767	4091	4421	4751	5081	5431	5743	6091
3167	3469	3769	4093	4423	4759	5087	5437	5749	6101
3169	3491	3779	4099	4441	4783	5099	5441	5779	6113
3181		3793		4447	4787		5443	5783	

Table

Table des nombres premiers, entre 1 & 10000.

6121	6449	6803	7151	7523	7893	8219	8581	8893	9241
6131	6451	6823	715	7529	7867	8221	8597	8923	9257
6133	6469	6827	717	7537	7873	8231	8599	8929	9277
6143	647	6829	7187	7541	7877	8233	8609	8933	9281
6151	6481	6833	7193	7547	7879	8274	8623	8941	9283
6163	6491	6841	7207	7549	7883	8236	8627	8951	9293
6173	6521	6857	7211	7559	7901	8236	8629	8963	9311
6197	6529	6833	7213	7561	7907	8269	8641	8969	9319
6199	6547	6841	7219	7573	7917	8273	8647	8971	9323
6203	6551	68[illegible]7	7229	7577	7927	8287	8663	8999	9337
6211	6553	6863	7237	7583	7933	8291	8669	9001	9341
6217	6563	6869	7243	7589	7937	8293	8677	9007	9343
6221	6569	6907	7247	7591	7949	8297	8681	9011	9349
6229	6571	6911	7253	7603	7951	8311	8689	9013	9371
6247	6577	6917	7283	7607	7963	8317	8693	9029	9 77
6257	6581	6947	7297	7621	7993	8329	8699	9041	9391
6263	6599	6949	7307	7639	8009	8353	8707	9043	9397
6269	6607	6959	7309	7643	8011	8363	8713	9049	9403
6271	6619	6961	7321	7649	8017	8369	8719	9059	9413
6277	6637	6967	7331	7669	8039	8377	8731	9067	9419
6287	6653	6971	7333	7673	8053	8387	8737	9091	9421
6299	6659	6977	7349	7681	8059	8389	8741	9103	9431
6301	6661	6983	7351	7687	8059	8419	8747	9109	9433
6311	6673	6991	7369	7691	8081	8423	8753	9127	9437
6317	6679	6997	7393	7699	8087	8429	8761	9133	9439
6323	6689	7001	7411	7703	8089	8431	8779	9137	9461
6329	6691	7013	7417	7717	8093	8443	8783	9151	9463
6337	6701	7019	7433	7723	8101	8431	8803	9157	9467
6343	6703	7027	7451	7727	8111	8461	8807	9161	9473
6353	6709	7039	7457	7741	8117	8467	8819	9173	9479
6359	6719	7043	7459	7753	8123	8501	8821	9181	9491
6361	6733	7057	7477	7757	8147	8513	883	9187	9497
6367	6737	7069	7481	7759	8161	8521	8837	9199	9511
6373	6761	7079	7487	7789	8167	8527	8839	9203	9521
6379	6763	7103	7489	7793	8171	8537	8849	9209	9533
6386	6779	7109	7499	7817	8179	8539	8861	9221	9539
6397	6781	7121	7507	7823	8191	8543	8863	9227	9547
6421	6791	7127	7517	7829	8209	8563	8867	9239	9551
6427	6793	7129		7841		8573	8887		

Table des nombres premiers , entre 1 & 10000.

9587	9629	9679	6733	9781	9817	9859	9907	9967
—	9631	9689	9739	9787	9829	9871	9923	9973
9601	9643	9697	9743	9791	9833	9883	9929	—
9613	9649	—	9749	—	9839	9887	9931	
9619	9661	9719	9767	9803	9851	—	9941	
9623	9677	9721	9769	9811	9857	9901	9949	

PROBLEMÈ IX.

Des Triangles rectangles en nombres.

ON appelle *Triangles rectangles en nombres* ; trois nombres inégaux, dont le plus grand est tel, que son quarré est égal à la somme des quarrés des deux autres, comme 3, 4, 5. Car le quarré 25 du plus grand 5, qu'on appelle *Hypotenuse*, est égal à la somme des quarrés 9, 16, des deux autres 3, 4, qu'on appelle *Côtés*, dont l'un étant pris pour la *Base* du Triangle rectangle, l'autre en sera la *Hauteur*. La moitié 6 du produit 12 sous cette base & cette Hauteur, se nomme *Aire*, qui est toujours divisible par 3. Vous remarquerez que par le produit de deux nombres nous entendons celui qui vient de leur multiplication.

Il y a une infinité de Triangles rectangles de diverses especes, tant en nombres entiers, qu'en nombres rompus : mais on les conçoit ordinairement en nombres entiers, entre lesquels le premier & le plus petit de tous est le précédent 3, 4, 5 : il a une infinité de belles propriétés, qu'il seroit trop long de rapporter ici. Je me contenterai de dire que la somme 216 des Cubes 27, 64, 125, de ses deux côtés 3, 4, & de son Hypothénuse 5, est un Cube, dont le côté 6 est égal à son Aire.

Digitized by Google

Pour trouver en nombre autant de Triangles rectangles qu'on voudra, prenez à volonté deux nombres, comme 2, 3, qu'on appelle *nombres generateurs*, & multipliez-les ensemble, pour avoir leur produit 6, dont le double 12 sera le côté d'un Triangle rectangle ; l'autre côté sera égal à la différence 5 des quarrés 4, 9, des nombres générateurs 2, 3 ; & l'hypoténuse sera égale à la somme 13 des mêmes quarrés 4, 9. De sorte qu'on aura ce Triangle rectangle 5, 12, 13 : car le quarré 169 de l'hypoténuse 13, est égal à la somme des quarrés 25, 144, dont les racines sont 5, 12.

Le premier Triangle rectangle 3, 4, 5, dont les deux nombres générateurs sont 1, 2, est tel, que la différence des deux côtés 3, 4, est 1. Si vous voulez en *trouver un autre qui ait la même proprieté*, prenez pour le plus petit nombre générateur de ce second Triangle le nombre 2, qui est le plus grand nombre générateur du premier. Doublez ce nombre 2 ; ajoutez à 4 double de 2, 1, le plus petit nombre générateur du premier, & vous aurez 5, qui sera le plus grand nombre générateur du second Triangle cherché, que vous trouverez en suivant la regle qu'on vient de donner. Ces trois nombres seront 20, 21, 29, dont les deux côtés 20, 21, ne différent que de l'unité.

Si vous voulez un troisiéme Triangle rectangle qui ait la même propriété, servez-vous des deux nombres générateurs 2, 5, du Triangle précédent, & prenez le plus grand 5 pour le plus petit du troisiéme Triangle rectangle. Doublez ce nombre 5, ajoutez à 10 double de 5, 1, le plus petit nombre générateur du Triangle précédent, & vous aurez 12 pour le plus grand nombre générateur du troisiéme Triangle rectangle, qui sera 119, 120,

169, où la différence des deux côtés 119, 120, eſt auſſi 1. Vous ſuivrez la même regle pour trouver les autres. La Table que l'on a jointe ici ſervira à faire connoître les ſix premiers triangles, dont les côtés ne different que de l'unité: on peut la continuer auſſi loin qu'on voudra, en ſuivant les exemples qu'on vient de donner.

Côtés.		*Hypoten.*	*Nombr. génér.*	
3.	4.	5.	1.	2.
20.	21.	29.	2.	5.
119.	120.	169.	5.	12.
696.	697.	985.	12.	29.
4059.	4060.	5741.	29.	70.
23660.	23661.	33461.	70.	169.

Le même premier Triangle rectangle 3, 4, 5, eſt encore tel, que l'excès de l'hypotenuſe 5 ſur le côté 4 eſt auſſi un, parce que ſes deux nombres générateurs 1, 2, différent de l'unité.

Baſes.	*Hauteurs.*	*Hypotén.*	*Nomb. génér.*	
3.	4.	5.	1.	2.
5.	12.	13.	2.	3.
7.	24.	25.	3.	4.
9.	40.	41.	4.	5.
11.	60.	61.	5.	6.
14.	84.	85.	6.	7.

C'eſt pourquoi on pourra *trouver une infinité d'autres Triangles rectangles, qui auront la même propriété*, ſi pour leurs nombres générateurs on prend deux nombres qui different de l'unité, comme vous voyez dans la Table précédente, où les premieres différentes des Baſes 3, 5, 7, 9, &c. ſont égales, & où les ſecondes différences des Hau-

Digitized by Google

teurs 4, 12, 24, 40, &c. sont aussi égales; ce qui aussi arrive aux Hypoténuses, 5, 13, 24, 41, &c.

REMARQUES.

Les secondes différences des hauteurs sont égales; car la différence de 12 à 4 & 8, & la différence de 24 à 12 est 12 : mais la différence de 12 à 8 est 4. De même la différence de 40 à 24 est 16, & la différence de 16 à 12 est aussi 4. Ainsi des autres.

Hauteurs.	*1es. Diff.*	*2es Diff.*
12		
4	8	
		4
24		
12	12	
		4
40		
24	16	

Les Hypoténuses ont aussi les secondes différences égales, comme on le voit par cette Table.

Hypoten.	*1es Diff.*	*2es. Diff.*
13		
5	8	
		4
25		
13	12	
		4
41		
25	16	

Les Bases sont ici des nombres impairs; & si l'on veut qu'*elles soient les quarrés* de ces mêmes nombres impairs, il ne faut que prendre les Hauteurs & les Hypoténuses pour les nombres géné-

rateurs des Triangles rectangles qu'on cherche ; lesquels par conséquent seront tels.

Bases.	*Hauteurs.*	*Hypoten.*	*Nombr. génér.*	
9.	40.	41.	4.	5.
25.	312.	313.	12.	13.
49.	1200.	1201.	14.	25.
81.	3280.	3281.	40.	21.
121.	7320.	7321.	62.	61.
169.	14280.	14281.	84.	85.

Si au lieu d'un côté, vous voulez que *l'Hypoténuse soit un nombre quarré*, il faut que les deux nombres générateurs soient les côtés d'un Triangle rectangle, comme vous voyez ici, où l'Hypoténuse est le quarré du plus grand nombre générateur augmenté de l'unité.

Côtés.		*Hypotén.*	*Nombr. génér.*	
7.	24.	25.	3.	4.
119.	120.	169.	5.	12.
336.	527.	625.	7.	24.
720.	1519.	1681.	9.	40.
1320.	3479.	3721.	11.	60.
2184.	6887.	7225.	13.	84.

Ce Triangle rectangle 21, 28, 35, est tel que les deux côtés 21, 28, sont des nombres Triangulaires, dont les côtés 6, 7, différent de l'unité, & le quarré 1225 de l'Hypoténuse 34 est aussi un nombre Triangulaire, dont le côté est 49.

Il arrive la même chose à cet autre Triangle rectangle 820, 861, 1189. Car les deux côtés 820,

861, sont des nombres Triangulaires, dont les côtés 40 41, différent aussi de l'unité, & le quarré 1413721 de l'Hypoténuse 1189 est aussi un nombre Triangulaire, dont le côté est 1681.

Il arrive encore la même chose à ce troisiéme Triangle rectangle 28441, 28680, 40391. Car les deux côtés 28441, 28680, sont des nombres Triangulaires, dont les côtés 238, 239, différent aussi de l'unité, & le quarré 1631432881 de l'Hypoténuse 40391 est aussi un nombre Triangulaire, dont le côté est 57121. Ainsi des autres.

Les Triangles rectangles suivans ont pour Bases & pour hypoténuses des nombres Triangulaires, & pour hauteurs des nombres cubiques. On en *trouvera autant que l'on voudra*, en ajoutant & en ôtant un nombre quarré de son quarré; car la moitié de la somme sera l'Hypoténuse, la moitié du reste sera la base, & la hauteur sera égale au Cube du côté du premier nombre quarré: ou bien en prenant pour nombres générateurs les nombres Triangulaires par ordre, comme vous voyez ici, où le plus petit nombre générateur d'un Triangle rectangle est le même que le plus grand du Triangle rectangle précédent, &c.

Bases.	*Hauteurs.*	*Hypoten.*	*Nombr. génér.*	
6.	8.	10.	1.	3.
36.	27.	45.	3.	6.
120.	64.	136.	6.	10.
300.	125.	325.	10.	15.
630.	216.	666.	15.	21.
1176.	343.	1225.	21.	28.

PROBLEME X.

De la Progression Arithmétique.

On appelle *Progression Arithmétique*, une suite de grandeurs, dont la différence est la même à l'égard de celles qui se suivent immédiatement. Cette suite peut aller en augmentant ou en diminuant. Ces nombres 1, 3, 5, 7, 9, 11, &c. forment une Progression Arithmétique, dont la différence ou l'excès est 2. Cette autre suite de nombres 2, 6, 10, 14, 18, 22. &c. est une autre Progression Arithmétique, dont la différence est 4. Ces deux Progressions vont en augmentant. Celle-ci 32, 27, 22, 17, 12, 7, &c. va en diminuant, & sa différence est 5. Chaque grandeur de la Progression est appellée *Terme*.

La principale propriétés de la Progression Arithmétique, est que si on prend trois termes de suite, 6, 10, 14, la somme 20, des deux extrêmes 6, 14 est double du moyen 10. De même si on prend quatre termes de suite 6, 10, 14, 18, la somme 24 des deux extrêmes 6, 18, est égale à celle des deux moyens 10, 14. Enfin si on prend un plus grand nombre de termes de suite, comme ces six, 2, 6, 10, 14, 18, 22, la somme 24 des deux extrêmes 2, 22, est encore égale à celle des deux autres 6, 18, qui en sont également éloignés, & à celle des deux 10, 14, qui en sont aussi également éloignés. D'où il est aisé de conclure que quand le nombre des termes est impair, la somme de deux termes également éloignés du moyen, est double de ce terme moyen, comme on le voit dans les cinq termes 2, 6, 10, 14, 18. Car la somme 20 des deux extrêmes 2, 18, ou de ces deux autres 6, 14 qui

Digitized by

ſont également éloignés du moyen 10, auſſi-bien que des extrêmes, eſt double de ce moyen 10.

On peut aiſément trouver autant qu'on voudra de Triangles rectangles en nombres, par le moyen de cette double Progreſſion Arithmétique $1\frac{1}{3}$, $2\frac{2}{5}$, $3\frac{3}{7}$, $4\frac{4}{9}$, $5\frac{5}{11}$, $6\frac{6}{13}$, $7\frac{7}{15}$, $8\frac{8}{17}$, &c. où l'excès eſt 2 dans les Fractions, & un dans les Nombres entiers. Car ſi l'on réduit l'entier avec ſa Fraction en une ſeule Fraction, comme $1\frac{1}{3}$ en $\frac{4}{3}$, * le numérateur 4, & le dénominateur 3, ſeront les côtés de ce Triangle rectangle 3, 4, 5, dont on connoîtra l'Hypoténuſe 5, en prenant la racine quarrée de 25, ſomme des quarrés 9, 16 des côtés 3, 4. De même ſi l'on réduit $2\frac{2}{5}$ en $\frac{12}{5}$ * le dénominateur 5 & le numérateur 12 ſeront les côtés de ce Triangle rectangle 5, 12, 13. Ainſi des autres : où vous voyez que tout nombre impair peut être l'un des deux côtés d'un Triangle rectangle, en nombres entiers.

Au lieu de cette double Progreſſion Arithmétique, on peut ſe ſervir de celle-ci, $1\frac{7}{8}$, $2\frac{11}{12}$, $3\frac{15}{16}$, $4\frac{19}{20}$, $5\frac{23}{24}$, $6\frac{27}{28}$, $7\frac{31}{32}$, $8\frac{35}{36}$, &c. où l'excès eſt 4 dans les Fractions, & 1 dans les Nombres entiers. Car ſi l'on réduit $1\frac{1}{8}$ en $\frac{15}{8}$, * le dénominateur 8, & le numérateur 15, ſeront les deux côtés de ce Triangle rectangle 8, 15, 17. De même ſi l'on réduit $2\frac{11}{17}$, en $\frac{35}{12}$, * le dénominateur 12, & le numérateur 35, ſeront les deux côtés de cet autre Triangle rectangle 12, 25 37. Ainſi des autres. où vous voyez qu'un nombre diviſible par 4 peut être l'un des deux côtés d'un Triangle rectangle en nombres entiers.

* Ce qui ſe fait en multipliant le nombre entier par le dénominateur, & ajoûtant au produit le numérateur.

Pour trouver une infinité de ſemblables Progreſſions, on prendra à volonté deux nombres quelconques, comme 1, 2, ou 3, 5, qui ſont les termes générateurs des deux Progreſſions précédentes, ou tels autres nombres qu'il plaira.

Premierement, on aura le numérateur de la premiere fraction en multipliant ces termes l'un par l'autre : ſi le produit eſt impair, il ſera le numérateur cherché ; mais s'il eſt pair, il faudra prendre le double de ce produit.

Secondement, on aura le dénominateur de cette premiere fraction, en ajoûtant les deux termes choiſis, & en multipliant cette ſomme par la différence de ces mêmes termes : ſi le produit eſt impair, il ſera le dénominateur cherché ; mais s'il eſt pair, on en prendra la moitié.

Troiſiémement, on aura le numérateur de la fraction ſuivante. 1°. En multipliant la différence des termes par 2, ſi elle eſt paire, ou par 4, ſi elle eſt impaire. 2°. En multipliant ce produit par le plus grand terme choiſi. 3°. En ajoûtant ce ſecond produit au numérateur de la premiere fraction ; cette ſomme formera le numérateur de la ſeconde fraction.

Enfin on aura le dénominateur de cette ſeconde fraction, en ajoûtant le quarré de la différence des termes choiſis, s'il eſt pair, ou le double de ce quarré, s'il eſt impair, au dénominateur de la premiere fraction. Cette ſomme donnera le dénominateur de la ſeconde fraction.

Les deux premiers termes de cette Progreſſion étant réduits en entiers & en fractions, il ſera aiſé de trouver la ſuite d'autant de termes qu'on voudra ; puiſqu'on connoît la différence des entiers, celle des numérateurs & celle des dénominateurs.

Digitized by Google

I.

Dans une Progression Arithmétique, la somme des termes est égale à la somme des deux extrêmes, multipliée par la moitié du nombre de tous ces termes. C'est pourquoi *pour trouver la somme d'autant de termes qu'on voudra d'une Progression Arithmétique*; par exemple, de ces huit, 3, 5, 7, 9, 11, 14, 15, 17, on multipliera par leur nombre 8, la somme 20 des deux extrêmes 3, 17, & 80 moitié du produit 160, sera la somme qu'on cherche.

II.

Si au contraire en connoît la somme des termes, leur nombre & le premier terme, on trouvera chacun de ses termes, en cherchant leur excès en cette sorte. Si la somme donnée des termes est par exemple 80, que leur nombre soit 8, & que le premier terme soit 3, divisez par le nombre donné des termes 8 le double 160 de la somme donnée 80; ôtez du quotient 20 le double 6 du premier terme donné 3; enfin divisez le reste 14 par le nombre donné des termes diminué de l'unité, c'est-à-dire, dans cet exemple par 7; le quotient 2 sera l'excès qu'on cherche, lequel étant ajoûté au premier terme donné 3, donnera 5 pour le second terme, auquel si l'on ajoûte le même excès 2, on aura 7 pour le troisiéme terme, & ainsi de suite.

III.

Mais si l'on donne la somme des termes, leur nombre & l'excès, on trouvera le premier terme,

& par conséquent tous les autres en cette sorte: Que la somme donnée des termes soit 80, que leur nombre soit 8, & que l'excès soit 2; divisez le double 160 de la somme donnée 80 par le nombre donné de termes 8; ôtez du quotient 20 autant de fois l'excès 2, que le nombre donné des termes 8 comprend d'unités moins une; sçavoir, 7 fois, c'est-à-dire, qu'il faut ici ôter 14; la moitié 3 du reste 6 sera le premier terme, auquel ajoûtant l'excès donné 2, on aura 5 pour le second terme: si l'on ajoûte à ce second terme le même excès 2, on aura 7 pour le troisiéme terme, & ainsi de suite.

IV.

Si on connoît le premier terme, le nombre & la différence des termes, on connoîtra le dernier terme en cette sorte. Multipliez le nombre des termes diminué de l'unité par la différence, ajoûtez à ce produit le premier terme, la somme donnera le dernier terme. Soit le premier terme 3, le nombre des termes 8, & leur différence 2, multipliez 7 nombre des termes diminué de l'unité par 2 différence des termes, ajoutez au produit 14 le premier terme 3, & vous aurez 17 pour le dernier terme. Nous ferons l'application de ces articles dans les Questions suivantes.

QUESTION I.

Un Propriétaire fait faire un Puits à un Maçon avec cette condition, qu'il lui donnera 3 livres pour la premiere toise de profondeur, 5 pour la seconde, 7 pour la troisiéme, & ainsi de suite en augmentant de 2 livres à chaque toise, jusqu'à

20 toises de profondeur. On demande combien il sera dû au Maçon, quand les 20 toises de profondeur seront achevées.

POur résoudre cette Question, multipliez les deux livres d'augmentation pour chaque toise de profondeur par le nombre des toises moins une de toute la profondeur, c'est-à-dire, par 19, & ayant ajoûté au produit 38 le premier terme 3, vous aurez 41 pour le dernier terme. Ajoûtez à ce dernier terme 41 le premier terme 3, qui est le nombre des livres promises pour la premiere toise, multipliez la somme 44 par la moitié 10 du nombre 20 des toises de toute la profondeur, & vous aurez 440 livres pour l'argent dû au Maçon sur 20 toises de profondeur.

REMARQUES.

Cette Question se résout par le quatriéme & le premier article; par le quatriéme article on trouve le dernier terme 41, & par le premier on trouve 440 livres, somme des 20 termes.

QUESTION II.

Un Voyageur a fait 100 lieues en huit jours; chaque jour il a fait également plus de chemin que le jour précédent, & le premier jour il a fait 2 lieues; on demande combien de lieues il a fait chaque jour.

POur résoudre cette Question, divisez le double 200 des lieues données 100, par le nombre donné 8 des jours, & ôtez du quotient 25 le

double 4 du nombre donné 2 des lieues du premier jour: divisez le reste 21 par 7, qui est le nombre donné des jours, diminué de l'unité; le quotient 3 fera connoître que le Voyageur a fait chaque jour 3 lieues plus que le précédent. D'où il est aisé de conclure, que comme le premier jour il a fait 2 lieues, le second il en aura fait 5, le troisiéme 8, le quatriéme 11, le cinquiéme 14, le sixiéme 17, le septiéme 20, & le huitiéme 23, ce qui fait en tout 100 lieues, comme porte la Question, & comme on le peut connoître par le premier article.

REMARQUE.

Cette seconde question se résout par le second article.

QUESTION. III.

Un voyageur a fait 100 lieues en huit jours, & il a fait chaque jour trois lieues plus que le précédent; on demande combien de lieues il a fait chaque jour.

POur résoudre cette Question, divisez le double 200 des lieues données 100, par le nombre donné 8 des jours, & ôtez du quotient 25 le nombre 21, qui est le nombre donné 3 des lieues de surplus en chaque jour, multiplié par le nombre donné des jours moins un, c'est-à-dire par 7: la moitié 2 du reste fera connoître que le premier jour le voyageur a fait 2 lieues, & par conséquent qu'il en a fait 5 le second jour, 8 le troisiéme, 11 le quatriéme, 14 le cinquiéme, 17 le sixiéme, 20 le septiéme, & 23 le huitiéme, ce qui fait en tout 100 lieues, comme porte la Question, & comme on le peut connoître par le premier article.

Digitized by Google

REMARQUE.

Cette troiſiéme Queſtion ſe réſout par le troiſiéme article.

QUESTION IV.

Un Voleur en s'enfuyant fait 8 lieues par jour, il eſt pourſuivi par un Archer, qui n'a fait que 3 lieues le premier jour, 5 le ſecond, 7 le troiſiéme, & ainſi de ſuite en augmentant de 2 lieues chaque jour. On demande en combien de jours l'Archer atteindra le Voleur, & combien de lieues chacun aura fait.

POur réſoudre cette queſtion & ſes ſemblables, ajoutez le nombre 2 des lieues que l'Archer fait chaque jour plus que le précédent, a 16 double de 8 nombre des lieues que le Voleur fait chaque jour, & ayant ôté de la ſomme 18 le double 6 du nombre 3 des lieues que l'Archer a fait le premier jour, diviſez le reſte 12 par 2 nombre des lieues que le même Archer fait de plus chaque jour : le quotient 6 fera connoître que l'Archer atteindra le Voleur au bout de ſix jours, & que par conſéquent chacun aura fait 48 lieues, parce que 6 fois 8 font 48, & que la ſomme de ces ſix termes de la Progreſſion Arithmétique 3, 5, 7, 9, 11, 13, fait auſſi 48.

REMARQUES.

Cette quatriéme Queſtion eſt trop compoſée, pour pouvoir n'être réſolue que par les articles précédens. Elle peut ſervir de modéle pour réſoudre les autres ſemblables; c'eſt-à-dire, que

dans ces sortes de questions, il faut doubler le nombre des lieues donnés, où la Progression ne se rencontre point, ajoûter à ce double la différence ou l'excès de la Progression Arithmétique, ôter de cette somme le double du premier terme de cette Progression, & diviser ce reste par la différence des termes de la Progression : le quotient sera le nombre des termes, qui étant multiplié par le nombre des lieues qui n'est point dans la Progression, donnera la somme de tous les termes.

QUESTION V.

On suppose que de Paris à Lyon il y a 100 lieues, que deux Couriers sont partis en même-tems, & par la même route, l'un de Paris pour aller à Lyon, en faisant 2 lieues chaque jour plus que le précédent, & l'autre de Lyon pour venir à Paris, en faisant 3 lieues chaque jour plus que le précédent : & que précisement au milieu du chemin ils se sont rencontrés, le premier au bout de 5 jours, & le second au bout de 4 jours. On demande combien de lieues ces deux Couriers ont fait chaque jour.

POur sçavoir combien de lieues a fait chaque jour celui qui, pour rencontrer l'autre, a employé 5 jours, ôtez ce nombre 5 de son quarré 25, & ayant multiplié le reste 20 par 2 nombre des lieues que ce Courier a fait chaque jour plus que le précédent, ôtez le produit 40 du nombre 100 de la distance de Paris à Lyon : puis divisez le reste 60 par 10 double de 5 nombre des jours : le quotient 6 fera connoître que le Courier a fait 6 lieues le premier jour, & par conséquent 8 le se-

con

cond, 10 le troisiéme, 12 le quatriéme, & 14 le cinquiéme.

De même pour sçavoir combien de lieues a fait chaque jour celui, qui pour rencontrer l'autre, a employé 4 jours, ôtez ce nombre 4 de son quarré 16, & ayant multiplié le reste 12 par 3 nombre des lieues que ce Courier a fait chaque jour de plus, ôtez le produit 36 du nombre 100 de la distance de Paris à Lyon : puis divisez le reste 64 par 8 double de 4 nombre des jours, & le quotient 8 fera connoître que ce Courier a fait 8 lieues le premier jour, & par conséquent 11 le second, 14 le troisiéme, & 17 le quatriéme.

REMARQUE.

Cette cinquiéme Question comprend deux parties, qui peuvent fort bien se résoudre chacune par le troisiéme article précédent, si l'on fait attention que 50 moitié de 100, est la somme des termes.

QUESTION VI.

Il y a un panier & cent pommes, rangées en ligne droite, & éloignées par-tout d'un pas l'une de l'autre. On demande combien de pas feroit celui qui entreprendroit de cueillir ces pommes les unes les autres, & de les rapporter dans le panier, qui resteroit toujours dans la même place.

IL est certain que pour la premiere pomme il faut faire 2 pas, un pour aller, & un pour revenir : que pour la seconde pomme il faut faire 4 pas, deux pour aller, & deux pour revenir : que pour la troisiéme pomme il faut faire 6 pas, trois pour aller, & trois pour revenir : & ainsi du reste.

On a cette progression Arithmétique 2, 4, 6, 8, 10, &c. dont le dernier & plus grand terme sera 200, qui est le double du nombre des pommes, auquel ajoutant le premier terme 2, & multipliant la somme 202 par la moitié 50 du nombre des pommes, qui est le nombre des termes, le produit 10100 sera la somme de tous ces termes, ou le nombre des pas qu'on cherche.

REMARQUE.

Cette sixiéme Question se résout par le quatriéme article, pour avoir le dernier terme 202, & par le premier, pour avoir la somme des termes 10100.

QUESTION VII.

Un Marchand est convenu avec un de ses Créanciers de lui donner de l'argent chaque semaine: la premiere semaine il lui a donné cent livres, la seconde quatre cens livres, il a augmenté chaque semaine son payement de trois cens livres. On demande combien il a payé la vingt-huitiéme semaine.

Pour résoudre cette Question, il faut multiplier 300 livres, différence de la Progression, par 27 nombre des semaines diminué de l'unité, & ajouter 100 livres premier terme au produit 8100. La somme 8200 livres sera le payement que le Marchand aura fait la vingt-huitiéme semaine.

REMARQUE.

La solution de cette septiéme Question n'est que l'application du quatriéme article. On peut s'exercer à chercher par le premier article qu'elle peut

être la somme qu'a payé le Marchand pendant les vingt-huit semaines. Voyez Schooten dans ses *Sectiones Miscellaneæ.*

QUESTION VIII.

Un Reservoir a douze canaux : par le second il s'écoule dans une heure deux pintes d'eau plus que par le premier : par le troisiéme deux pintes plus que par le second , & ainsi de suite. On sçait que tous ces canaux laissent écouler 168 pintes d'eau dans une heure. On veut sçavoir combien chacun de ces canaux laisse écouler d'eau pendant une heure.

IL faut diviser 168 somme de la Progression par 6 moitié de 12, nombre des canaux ou des termes : du quotient 28 on ôtera 22 produit de 2 différence par 11 nombre des termes diminué de l'unité, il restera 6, dont la moitié 3 est le premier terme de la Progression, c'est-à-dire, que le premier canal laissera écouler 3 pintes d'eau dans une heure, le second cinq pintes pendant le même temps, le troisiéme 7 pintes, &c.

REMARQUE.

Cette huitiéme Question étant assez composée ; ne peut se rapporter précisément à aucun des quatre articles précédens : mais elle peut servir de regle pour résoudre toutes les questions qui lui sont semblables.

QUESTION IX.

Un Pere de famille ordonne par son testament que

l'aîné de ses enfans prendra sur tous ses biens dix mille livres, & le septiéme de ce qui restera; que le second prendra vingt mille livres, & le septiéme de ce qui restera; que le troisiéme prendra trente mille livres, & le septiéme de ce qui restera, & ainsi de suite, en augmentant toujours de dix mille livres avec le septiéme du restant. Les enfans ayant suivi la disposition du testament, il se trouve qu'ils ont été également partagés. On demande quel étoit le bien à partager, le nombre des enfans, & la somme que chacun a eu.

POur résoudre cette neuviéme Question, & les autres qui lui sont semblables, il faut ôter 1 du dénominateur de la fraction, qui est ici 7; le reste 6 sera le nombre des enfans. Il faut ensuite quarrer ce reste 6, & multiplier son quarré 36 par la somme que doit prendre l'aîné des enfans, & qu'on a supposé ici être 10000 livres; le produit 360000 est le bien à partager. Divisant ce produit par 6, nombre des enfans, on trouve 60000 liv. qui est la somme que chacun des enfans a pris.

REMARQUE.

Si on veut se servir de l'Algebre pour résoudre ces sortes de Questions, on peut consulter les nouveaux Elemens d'Arithmétique & d'Algebre, par M. de Lagny de l'Académie Royale des Sciences, pag. 417.

PROBLEME XI.

De la Progression Géométrique.

ON appelle *Progression Géométrique* une suite de plusieurs quantités qui croissent continuellement par la multiplication d'un même nombre,

comme 3, 6, 12, 24, 48, 96, &c. où chaque terme eſt double du précédent : ou bien, 2, 6, 18, 54, 162, 486, &c. où chaque terme eſt triple du précédent. Ainſi des autres.

I.

La principale proprieté de la progreſſion Géométrique, eſt que ſi on prend trois termes en proportion continue, comme 3, 6, 12, le produit 36 des deux extrêmes 3, 12, eſt égal au quarré du moyen 6. De même ſi on prend quatre termes en proportion continue, comme 3, 6, 12, 24, le produit 72 des deux extrêmes 3, 24, eſt égal au produit des deux moyens 6, 12. Enfin ſi on prend un plus grand nombre de termes continuement proportionnels, comme ces ſix, 3, 6, 12, 24, 48, 96, le produit 288 des deux extrêmes 3, 96, eſt égal au produit des deux 6, 48, qui en ſont également éloignés, ou des deux 12, 24, qui en ſont auſſi également éloignés. D'où il eſt aiſé de conclure, que lorſque le nombre des termes eſt impair, ce produit eſt égal au quarré du terme moyen, comme il arrive dans ces cinq termes 3, 6, 12, 24, 48. Car le produit 144 des deux extrêmes 3, 48, ou des deux 6, 24, qui en ſont également éloignés, eſt le quarré du terme moyen 12.

Ainſi vous voyez que ce qui convient à la Progreſſion Arithmétique par Addition, convient à la Progreſſion Géométrique par multiplication. Mais il y a une autre différence conſidérable entre ces deux Progreſſions ; c'eſt que dans la Progreſſion Arithmétique les différences des termes ſont égales, au lieu que dans la Progreſſion Géométrique elles ſont toujours inégales, elles conſervent entre elles la même Progreſſion Géométrique, & quoi-

qu'on prenne à l'infini les différences des différences, on ne peut jamais parvenir à des différences égales. Ainsi l'on voit que dans cette Progression Géométrique 2, 6, 18, 54, 162, 486, les différences des termes sont cette semblable Progression Géométrique 4, 12, 36, 108, 324, ou les différences des termes sont aussi cette semblable Progression Géométrique 8, 24, 72, 216, & ainsi de suite.

Si on prend trois termes proportionnels, comme 2, 6, 18, le cube 216 du moyen 6 est égal au produit solide qui vient de la multiplication des trois nombres 2, 6, 18. De même si on prend quatre nombres continuement proportionnels, comme 2, 6, 18, 14, le cube 256, du second 6 est égal au produit solide qu'on a en multipliant le quatriéme 14 par 4, quarré du premier 2; & le cube 5832 du troisiéme 18 est égal au produit solide qui vient en multipliant le premier 2 par 2916 quarré du quatriéme 54.

II.

On connoît aisément par ce qui a été dit jusqu'à présent, que *pour trouver un moyen géométrique proportionnel entre deux nombres donnés*, comme entre 2 & 18, il faut multiplier ensemble les deux nombres donnés 2, 18, & prendre la Racine quarrée 6 de leur produit 36, qui sera le moyen proportionnel qu'on cherche.

Et *pour trouver deux moyens géométriques continuement proportionnels entre deux nombres donnés*, comme entre 2 & 54, il faut multiplier le dernier 54 par 4 quarré du premier 2, & la racine cubique 6 du produit 216 sera le premier moyen proportionnel; lequel étant multiplié par 54 second

nombre donné, donnera pour produit 324, dont la Racine quarrée 18 sera l'autre moyen proportionnel qu'on cherche.

III.

Mais *pour trouver un moyen proportionnel Arithmétique entre deux nombres donnés*, comme entre 2 & 8, il faut prendre 5 moitié de 10 somme des nombres donnés 2, 8. Cette moitié 5 sera le moyen proportionnel qu'on cherche.

Et *pour trouver deux moyens Arithmétiques continuement proportionnels entre deux nombres donnés*, comme entre 2 & 11, on ôtera 2 le plus petit nombre donné du plus grand 11; on ajoutera séparément au même plus petit 2 le tiers 3 du reste 9 & 6 double de ce tiers, & l'on aura 5 & 8 pour les deux moyens proportionnels qu'on cherche.

Ou bien on ajoutera au plus grand 11 des deux nombres donnés le double 4 du plus petit 2, & réciproquement au plus petit 2 le double 22 du plus grand 11, & les tiers des deux sommes 15, 24, donneront 5 & 8 pour les deux moyens qu'on cherche.

IV.

Il est évident que toutes les Puissances par ordre d'un même nombre, comme de 2, font une Progression Geométrique, telle qu'est la suivante,

1 2 4 8
2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, &c.
1 1 1 1
3 5 17 257

Où vous voyez que toutes les Puissances du nom-

bre 2 ; dont les exposans 1 , 2 , 4 , 8 , &c. sont les termes d'une Progression Géométrique, sçavoir 2 , 4 , 16 , 256 , &c. sont telles que si à chacune on ajoute l'unité, les sommes 3 , 5 , 17 , 257 , &c. sont des nombres premiers. Par où il est aisé de trouver un nombre premier plus grand que quelque nombre donné que ce soit.

V.

Les termes d'une Progression Géométrique peuvent aller en augmentant ou en diminuant, mais quelle que soit la Progression, *on pourra la continuer à l'infini*, si connoissant les deux premiers termes, on divise le quarré du second terme par le premier, le quotient sera le troisiéme terme; si on divise ensuite le quarré du terme trouvé par le terme précédent, le quotient sera le terme suivant, & ainsi de suite. Soient donnés 2 , 4 premiers termes d'une Progression. Pour la continuer à l'infini, il suffit de diviser 16 quarré du second terme 4, par le premier 2 , le quotient 8 sera le troisiéme terme; on divisera ensuite 64 quarré du troisiéme terme 8 par le terme précédent 4 , & le quotient 16 sera le quatriéme terme. Ainsi du reste.

Quand la Progression va en augmentant, il est plus aisé de diviser le second terme par le premier, & de multiplier le second terme par le quotient qu'on appelle exposant de la raison : le produit donne le troisiéme terme. On multiplie ensuite ce troisiéme terme par le même exposant, ce produit donne le quatriéme terme. On continue la même opération pour avoir autant de termes qu'on voudra.

VI.

Pour trouver quelque terme que ce soit d'une Pro-

Digitized by

greſſion, dont on oonnoît le premier & le ſecond terme, ſi elle va en augmentant, comme celle-ci, 2, 4, 8, 16, & qu'on veuille connoître le huitiéme terme, il faut diviſer le ſecond terme 4 par le premier 2, il viendra 2 pour expoſant de la Progreſſion ; il faut enſuite multiplier cet expoſant 2, 7 fois par lui-même, nombre du terme qu'on cherche diminué de l'unité, c'eſt-à-dire, qu'il faut prendre la ſeptiéme puiſſance de 2, qui eſt 128, qu'on multipliera par le premier terme 2 ; le produit 256 ſera le huitiéme terme qu'on demande.

VII.

Si on propoſe une Progreſſion Géométrique qui aille en augmentant, comme celle-ci, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, le premier terme 2 eſt au ſecond 4, comme la ſomme de tous les termes moins le dernier 256 eſt à la ſomme de tous les termes moins ce premier 2. Ainſi *pour avoir la ſomme de tous les termes d'une Progreſſion qui va en augmentant*, comme de la précédente, il faut multiplier le dernier terme 256 par le ſecond 4, retrancher du produit 1024 le quarré 4 du premier terme 2, & diviſer le reſte 1020 par 2 différence du ſecond terme 4 au premier 2 ; le quotient 510 ſera la ſomme de tous les termes de la Progreſſion propoſée.

VIII.

Si l'on continue à l'infini une Progreſſion Géométrique en décroiſſant, comme 6, 2, $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{2}{27}$, &c. la différence 4 des deux premiers termes 6, 2, eſt au premier 6, comme le même premier 6, eſt

à la ſommme de tous les termes infinis. C'eſt pourquoi *pour trouver la ſomme de tous les termes infinis d'une Progreſſion Géométrique*, *qui décroît*, comme de la propoſée, 6, 2, $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{2}{27}$, &c. il faut diviſer le quarré 36 du premier terme 6, par la différence 4 des deux premiers 6, 2, & le quotient 9 ſera la ſomme qu'on cherche, de laquelle ôtant 8 ſomme des deux premiers termes 6, 2, il reſtera 1 pour la ſomme de ces Fractions infinies continuement proportionnelles $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{2}{27}$, &c. On connoîtra de la même façon, que la ſomme de toutes ces Fractions infinies continuement proportionnelles, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$, &c. vaut auſſi 1.

REMARQUE.

Quand on parle de quantités proportionnelles ſans ſpécifier, cela s'entend toujours de la Proportion Géométrique. Nous dirons ici en paſſant, que ſi de l'unité, comme numérateur, & des nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, &c. comme Dénominateurs, on fait cette ſuite de Fractions, $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, &c. qui vont toujours en diminuant, ces Fractions étant priſes conſécutivement de trois en trois, comme l'on voudra, ſeront en proportion harmonique, c'eſt-à-dire, que la premiere de ces trois ſera à la troiſiéme, comme la différence des deux premieres eſt à la différence des deux dernieres. Ce que l'on connoîtra encore mieux en réduiſant ces Fractions en même dénomination, ou en entiers, comme on le voit ici pour les cinq Fractions $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, en les multipliant par le même nombre 60, qui eſt diviſible par tous les dénominateurs 2, 3, 4, 5; car à la place de ces cinq Fractions, on aura ces

cinq nombres entiers 60, 30, 20, 15, 12, dont les trois premiers 60, 30, 20, ſont en proportion harmonique. Car le premier 60 eſt au troiſiéme 20, qui en eſt la troiſiéme partie, comme la différence 30 des deux premiers eſt à la différence 10 des deux derniers, qui en eſt auſſi la troiſiéme partie. C'eſt par un ſemblable raiſonnement que l'on connoîtra que ces trois nombres 30, 20, 15, ſont en proportion harmonique, auſſi-bien que ces trois autres 20, 15, 12.

QUESTION I.

Un grand Navire en pourſuit un plus petit, dont il eſt éloigné de 4 lieues, & il va deux fois plus vîte que le plus petit : ils ſont ſur le même Rumb. On demande le chemin que le grand Navire doit faire pour atteindre le petit.

PArce que la diſtance des deux Navires eſt 4, & que leurs vîteſſes ſont en raiſon double, continuez à l'infini cette Progreſſion Géométrique double 4, 2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, &c. dont le premier & le plus grand terme ſoit 4 : cherchez la ſomme de tous ces termes infinis, en diviſant 16 quarré du premier 4 par la différence 2 des deux premiers 4, 2, vous aurez 8 pour cette ſomme, qui fera connoître que lorſque le grand Navire aura fait 8 lieues, il atteindra le petit.

QUESTION II.

On suppose qu'Achille aille dix fois plus vîte qu'une Tortue, qui auroit une lieue d'avance. On demande s'il est possible qu'Achille attrappe cette Tortue, & à quelle distance il l'attrappera.

ON a fait cette Question, parce que Zenon, Chef des Philosophes appellés Stoïciens, prétendoit qu'Achille ne pourroit jamais attraper la Tortue. Car tandis qu'Achille, disoit ce Philosophe, feroit la premiere lieue, la Tortue feroit le dixiéme de la seconde lieue ; & tandis qu'Achille feroit le dixiéme de la seconde lieue, la Tortue feroit le dixiéme de cette dixiéme, ou un centiéme ; & ainsi à l'infini.

Ce Philosophe supposoit faussement que tous ces dixiémes composoient un espace infini ; mais il est aisé de faire voir qu'ils font cette Progression Géométrique, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, &c. dont les termes vont en diminuant à l'infini. On trouvera la somme de tous ces termes infinis en divisant 1 quarré du premier terme par 1, moins $\frac{1}{10}$, ou $\frac{9}{10}$, différence du premier & du second terme ; le reste est $\frac{10}{9}$, ou $1\frac{1}{9}$. Ce qui fait voir qu'Achille attrapera la Tortue, quand il aura parcouru la premiere lieue, & le neuviéme de la seconde lieue.

QUESTION III.

Une Pendule a deux aiguilles, l'une des heures, & l'autre des minutes. Supposant qu'elles partent

Digitized by Google

toutes deux du point de midi, on demande en quel autre point elles doivent ſe rencontrer.

PUiſque l'une des deux aiguilles va douze fois plus vîte que l'autre, & que quand celle des heures eſt au point de midi, celle-ci a un tour d'avance plus que celle-là. Leur mouvement formera donc cette Progreſſion Géométrique $1 . \frac{1}{14} \frac{1}{144}$. &c. qui décroit à l'infini: par conſéquent ſi l'on diviſe le quarré du premier terme 1. par la différence du premier au ſecond $\frac{11}{12}$ on connoîtra que ces deux aiguilles ſe rencontreront à $1 \frac{1}{11}$, c'eſt-à-dire, à une heure & un onziéme d'heure.

D'où il eſt aiſé de conclure que ces aiguilles ſe rencontreront à ces heures-ci, $1\frac{1}{11}$. $2\frac{2}{11}$. $3\frac{3}{11}$. $4\frac{4}{11}$. $5\frac{5}{11}$. $6\frac{6}{11}$. $7\frac{7}{11}$. $8\frac{8}{11}$. $9\frac{9}{11}$. $10\frac{10}{11}$. $11\frac{11}{11}$ ou 12 heures.

REMARQUE.

On voit bien que ces trois premieres Queſtions ſe réſolvent par l'Article VIII. précédent.

QUESTION IV.

Un Maquignon vend un très-beau cheval, il ſe contente du prix du vingt-quatriéme clou du cheval, pourvû qu'on veuille compter de maniere que du premier clou on donnat 1 denier, du ſecond 2 deniers, du troiſiéme 4 deniers, & ainſi de ſuite, en doublant les deniers juſqu'au vingt-qua-

triéme clou. On demande de quel prix seroit le cheval.

PUisque le prix des cloux forme cette Progression 1. 2. 4. 8. 16. &c. qui va en augmentant, il faut prendre la vingt-troisiéme puissance de 2 exposant de la Progression, ce sera 8388608 deniers, ou trente-quatre mille neuf cens cinquante-deux livres dix sols huit deniers, pour le prix du cheval.

REMARQUE.

La solution de cette Question dépend du sixiéme article; on n'a point multiplié la vingt-troisiéme puissance de 2 par le premier terme, qui est ici l'unité, parce qu'elle ne change rien dans la multiplication. C'est une chose à remarquer dans les Progressions qui commencent par l'unité.

QUESTION V.

Une vieille Dame posséde trente-deux belles Terres; elle est fort avare, elle aime l'argent encore plus que ses Terres, elle voudroit en vendre quelques-unes, afin d'avoir le plaisir de marcher sur l'or; mais pour ne point effrayer un de ses héritiers, qui est homme de cœur, elle ne propose d'abord que la moindre à vendre, sous prétexte que l'argent est rare, & qu'elle a quelques dettes à payer, quoique ses coffres soient pleins. On offre de lui donner pour cette Terre la somme qui conviendroit à la trente-deuxiéme de ses Terres, si on payoit 1 sol pour la premiere, 2 sols pour la seconde, 4 sols pour la troisiéme, & ainsi de suite en doublant les sols jusqu'à la trente-deuxiéme Terre,

Digitized by Google

Cette Dame apprehende d'être trompée, elle demande quel prix on lui donneroit de sa Terre.

ON peut aisément la rassurer, elle trouvera son compte à vendre sa Terre à la condition qui lui a été offerte. L'Acheteur seroit obligé de lui donner 107 millions 374 mille 182 livres huit sols.

REMARQUE.

On peut s'exercer à trouver ce nombre en cherchant la trente-uniéme puissance de 2 exposant de la Progression, suivant l'article VI. & ce qui a été dit dans la Remarque de la Question précédente.

QUESTION VI.

On suppose qu'un grain de Bled produise 50 autres grains dans la premiere année; qu'on seme ces 50 grains, & qu'ils produisent chacun 50 grains la deuxiéme année, & ainsi de suite. On demande quel sera le nombre des grains de Bled qui seront produits pendant douze ans.

CE nombre des grains de Bled produits pendant douze ans est très-considérable. Il faut d'abord trouver le douziéme terme de cette Progression Géométrique 1. 50. 2500. 125000. &c. qui va en augmentant. Ce douziéme terme contient ces chifres 48, 828, 125, accompagnés de onze zéros, & pour trouver la somme demandée, il faudroit, suivant l'Article VII. multiplier encore ce douziéme terme par le second 50: ôter 1 quarré du premier terme de ce produit, & diviser le reste par 49, différence du second ter-

me au premier. On conçoit qu'il viendroit un nombre très-grand.

REMARQUE.

Cette Question est embarrassante dans le calcul, à cause de la grande raison qui est entre les termes : mais on pourra appliquer ici la quatriéme Question, & demander quel seroit le prix des vingt-quatre clous d'un cheval, en payant le premier 1 denier, le second 2 deniers, le troisiéme 4 deniers, &c. On trouvera que ce prix seroit de 16,777,215 deniers, ou de 69,905 livres 1 sol 3 deniers.

La question cinquiéme trouveroit ici sa place, si l'on vouloit chercher quelle seroit la somme qu'il faudroit payer pour les trente-deux Terres aux conditions qui ont été offertes.

QUESTION VII.

JE renfermerai dans cette Question plusieurs autres, que je ne ferai que proposer. On cherchera quel peut avoir été le nombre des hommes deux cens ans après Adam, en supposant qu'ils ayent tous vécu, & que cette famille fût seulement augmentée de quatre personnes la premiere dixaine d'années, de huit la seconde dixaine, de seize la troisiéme dixaine, & ainsi de suite de dix ans en dix ans, suivant la Progression double, qui est 2. 4. 8. 16. &c. le nombre des termes de cette Progression est 20, dont il faut trouver le dernier par l'Article VI. & la somme de tous ces termes par l'Article VII. On jugera de cette somme par le dernier terme, qui est d'un million 48 mille 576 personnes.

2. On

Digitized by Google

2. On examinera de combien la famille de Jacob, qui entra en Egypte avec 70 personnes, put être augmentée 200 ans après son arrivée, en supposant seulement que dans les vingt premieres années elle ait été augmentée de trois fois autant, c'est-à-dire, qu'au bout de 20 ans il y ait eu 210 personnes, & ainsi de suite: ce qui est très-croyable. On trouvera qu'à la fin des vingt dernieres années elle a pû être composée d'un million 177 mille 810 personnes, *art.* VI.

3. Qui croira que les revenus du Grand Seigneur ne seroient pas capables de nourrir pendant douze ans la race d'une Truye, qui auroit portée d'une ventrée 6 petits cochons, dont deux seroient mâles & les quatre autres femelles. C'est cependant une chose très-véritable, en supposant même que les quatre femelles ne portent chacune la premiere année que six petits cochons, dont 4 seront encore femelles & 2 mâles, & que chaque femelle en porte autant les années suivantes pendant douze ans. Cela supposé, on connoîtra que le nombre de tous les cochons pendant ce tems montera à 33 millions 554 mille 230. Supposant à présent qu'il ne faille qu'un écu par an pour chaque cochon, on jugera si le Grand Seigneur est assez puissant pour nourrir la race d'une seule Truye pendant douze ans.

REMARQUES.

Il y a une attention à faire sur le calcul de cette somme. Il faut partager le nombre 6 des premiers petits cochons en deux termes; dont l'un, qui est 2, sera le premier terme de la progression des mâles, & l'autre, qui est 4, sera le premier terme

de la Progreſſion des femelles. Ainſi il ſera aiſé de connoître que la premiere Progreſſion eſt 2, 83, 2, 128, &c. & que la ſeconde eſt 4, 16, 64, 256, &c. On ajoûtera les ſommes des 12 termes de ces deux Progreſſions, & l'on aura le nombre des petits cochons, tant mâles que femelles.

4. On ſe convaincra que le monde entier ne pourra contenir toute la ſemence qui ſeroit produite d'un ſeul grain de moutarde pendant vingt-cinq ans, ſi on ſuppoſe qu'un grain de moutarde en produiſe mille chaque année.

5. On ſera étonné du nombre prodigieux des poiſſons, ſi la plus grande partie de leurs œufs étoient féconds, il n'y auroit qu'à ſupputer combien il viendroit de carpes d'une ſeule carpe pendant quelques aunées, & porter un jugement ſemblable pour tous les autres poiſſons.

6. Ce n'eſt point les animaux les plus féconds qui peuvent nous jetter dans l'étonnement : la fécondité des brebis même qui ne portent qu'une fois par an, pourroit étonner leurs maîtres, ſi on avoit ſoin de conſerver tous les agneaux qui naiſſeur pendant quelques années.

On peut connoître, ſuivant ce qu'on a dit dans les articles précédens, en faiſant quelques ſuppoſitions que tous les agneaux d'un grand troupeau de brebis peuvent ſe monter à plus de 25500 pendant l'eſpace de huit ans.

PROBLEME XII.

Des quarrés Magiques.

ON appelle *Quarré Magique* un quarré diviſé en pluſieurs autres petits Quarrés égaux,

Digitized by Google

ou caſes remplies de termes d'une Progreſſion qui y ſont tellement diſpoſés, que tous ceux d'une même bande, ou d'un même rang, tant en long qu'en large & en diagonale ajoutez enſemble, font une même ſomme, ou multipliez, donnent un même produit.

Il ſuit de la définition, qu'on vient de lire, qu'il y a deux eſpeces de Quarrés Magiques, les uns ſont formés par les termes d'une Progreſſion Arithmétique; les autres ſont formés par les termes d'une Progreſſion Géométrique.

Ces Quarrés ſont pairs ou impairs; les Quarrés impairs ſont ceux qui contiennent un nombre impair de caſes, & les pairs ſont ceux qui tiennent un nombre pair de caſes.

Des quarrés Magiques impairs, formés par des termes en Progreſſion Arithmétique.

LE Quarré Magique ſuivant eſt un Quarré impair; il eſt diviſé en 25 petites caſes égales, ou les 25 premiers nombres naturels 1, 2, 3, 4, &c. ſont tellement diſpoſés, que la ſomme de chaque rang, ſoit de haut en bas, ſoit de droit à gauche, ſoit en diagonale, eſt par tout 65.

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

Dans tout *Quarré impair*, la ſomme des nombres de chaque rang ou de chaque diagonale, eſt égale au produit de la racine du quarré impair & du terme moyen de la Progreſſion Arithmétique. La

somme 65 des nombres de chaque rang ou de chaque diagonale de ce quarré impair 25, est égale au produit de 5 sa racine, & de 13 terme moyen de la Progression Arithmétique 1, 2, 3, 4, &c. ce terme moyen se trouve dans la case du milieu du quarré, qui contient les nombres naturels, comme on le peut voir dans le Quarré suivant.

Cette somme 65 se trouve aussi en disposant les termes donnés de la Progression Arithmétique, selon leur suite naturelle 1, 2, 3, 4, &c. dans quelques rangs de cases de ce quarré, qui sont les deux rangs du milieu qui traversent le quarré du haut en bas, & de gauche à droite, & chaque rang diagonal, c'est-à-dire, qui va d'un angle du quarré à l'autre angle. La même chose arrivera aux quarrés pairs qui sont des quarrés qui contiennent un nombre quarré pair de cases.

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

Pour disposer magiquement dans les cases d'un quarré impair, par exemple, de celui-ci, dont le côté est 5, ou qui a 25 cases, autant de nombres donnés en Progression Arithmétique, comme 1, 2, 3, 4, 5, & ainsi de suite jusqu'au dernier & plus grand 25, écrivez le premier &

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

Digitized by Google

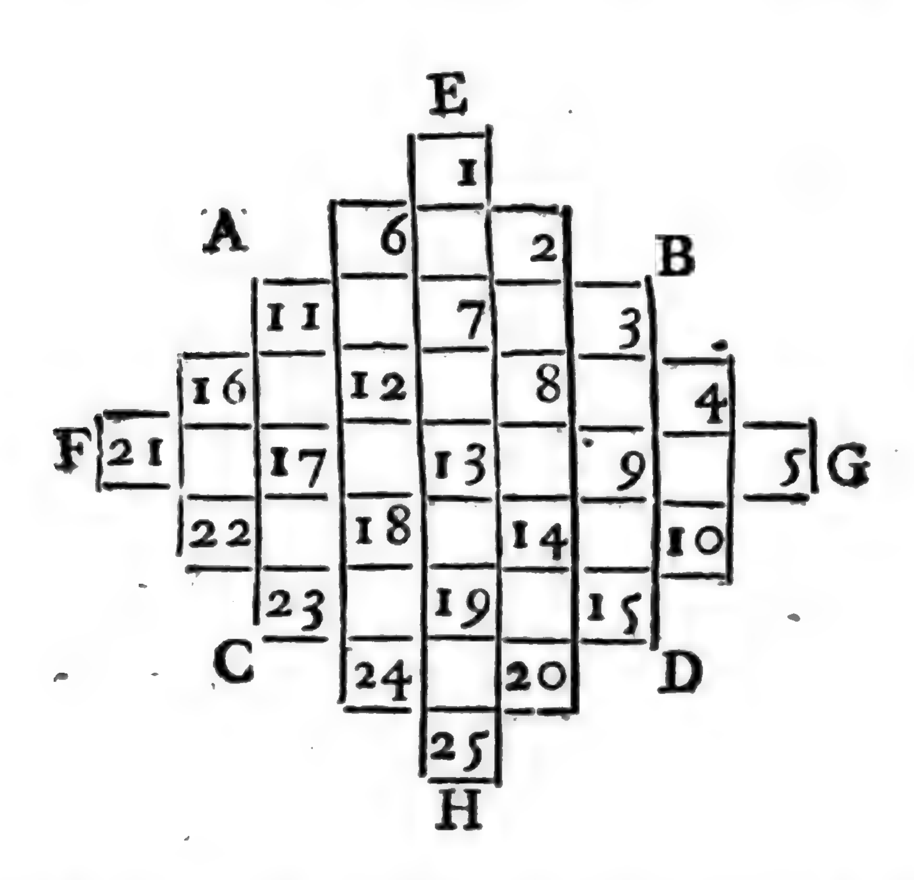
plus petit 1 dans la case qui répond immédiatement sous celle du milieu, où est le centre du quarré, & suivant la diagonale vers la droite, écrivez le second terme 2 dans la case voisine & plus basse de la bande qui suit vers la droite. Continuez ainsi jusqu'à ce que vous ayez rempli la plus basse case, comme il arrive ici au second terme 2.

Après cela, parce qu'en continuant selon la diagonale de la gauche vers la droite, le terme suivant 3 se rencontre en dehors, on le placera à la case opposée de la bande où il se rencontrera. Et parce qu'en continuant selon la diagonale vers la droite, le terme suivant 4 se trouve aussi en dehors, on le placera dans la case opposée du rang où il se rencontre en dehors. Après quoi on continuera à placer les termes suivans toujours en descendant selon la diagonale vers la droite. Mais parce que le terme 6 tombe dans une case qui est remplie; sçavoir, dans celle où il y a 1, on rétrogradera selon la diagonale de la droite vers la gauche, & l'on écrira ce terme 6 dans la seconde case du rang, où le terme précédent 5 se rencontre: en sorte qu'entre ces deux termes il reste une case vuide; ce qu'il faut toujours pratiquer, lorsqu'une case se trouvera remplie.

Enfin on continuera selon ces regles à placer les autres termes dans les cases vuides, jusqu'à ce qu'on soit parvenu à l'angle du quarré, où dans cet exemple le terme 15 se rencontre. Alors comme on ne peut plus se conduire selon la diagonale en descendant vers la droite, pour placer le terme suivant 16, on le placera dans la seconde case d'en haut du même rang. Après quoi les autres termes se placeront dans les autres cases vuides

comme les précédens, ſans qu'il puiſſe arriver quelque nouvelle difficulté.

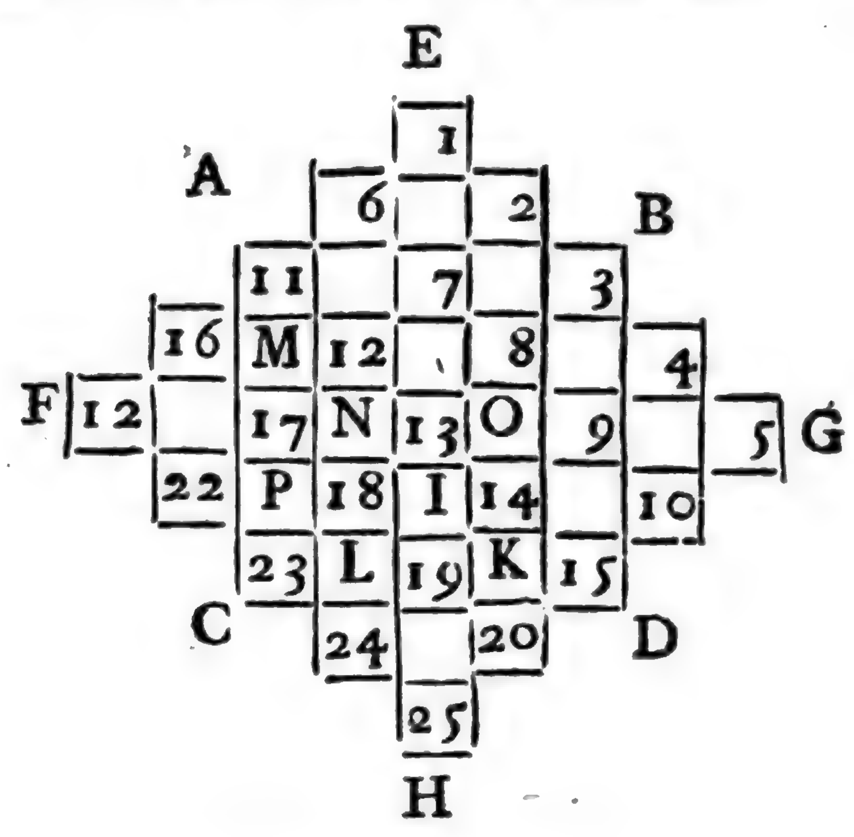
Il ſera aiſé d'exécuter la diſpoſition de ce quarré & des autres de la même eſpece, ſi on ſuit cette méthode. Après avoir fait un quarré impair comme celui-ci, ABCD de 25 caſes, élevez de chaque côté, en continuant les caſes, excepté celles qui ſont aux coins, A, B, C, D, d'autres lignes hors de ce quarré, telles que vous les voyez ici repréſentées. Ces caſes hors du quarré iront en diminuant; en ſorte qu'il s'en trouvera une qui ſera la plus éloignée de chaque côté, telles que ſont E, F, G, H. Vous choiſirez celle d'en haut E,



pour placer l'unité; enſuite en tirant vers la droite B D, & ſuivant la diagonale, vous placerez dans une ſeconde caſe le nombre 2, puis en ſuivant toujous la même diagonale, vous placerez les nombres 3, 4, 5, dans les caſes du quarré &

Digitized by Google

hors du quarré, jusqu'à ce que vous soyez parvenu à la case unique G, la plus éloignée hors du quarré, du côté BD, qui est à droite. Après cela vous retournerez à la seconde case hors du quarré à côté de 1 vers la gauche, où vous marquerez 6, puis en suivant toujours la diagonale, & tirant à droite vers BD, vous écrirez les chifres, 6, 7, 8, 9 & 10, qui est placé dans une derniere case hors du quarré; alors vous reviendrez à la case gauche A, la plus proche de celle qui contient 6; vous y écrirez 11, & les autres nombres 12, 13, 14, 15, dans les cases suivantes, en suivant la diagonale, & tirant à droite vers BD. Vous feroz pour le reste des nombres du quarré impair la même chose qu'on vient de faire, jusqu'à ce que vous soyez arrivé au nombre quarré impair, qui est ici 25, & qui se trouvera dans la derniere case d'en bas H hors du quarré.



hors du quarré dans les cases du quarré vuides

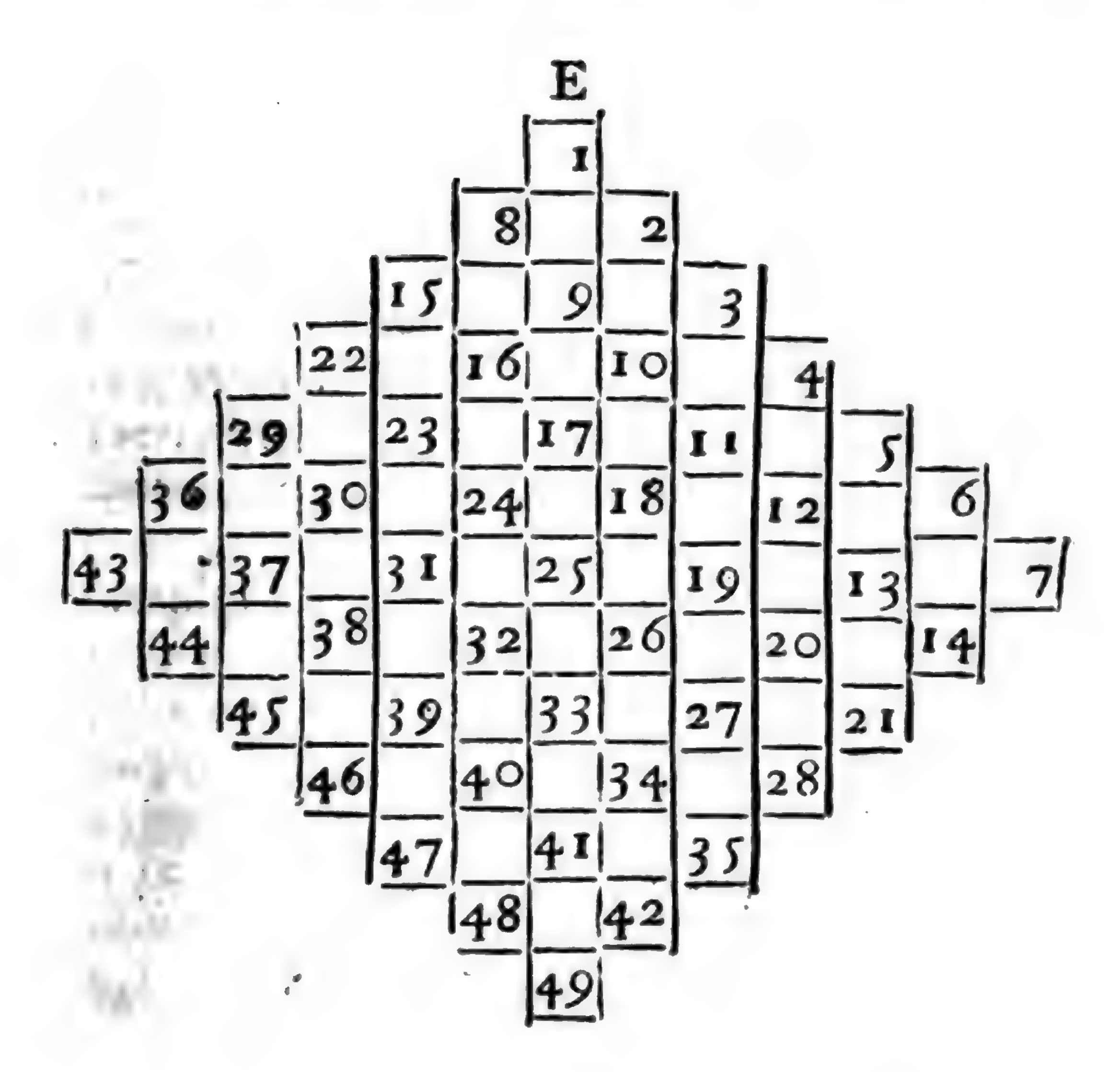
& opposées des mêmes rangs où ils se trouvent, comme 1 dans I, 2 dans K, 6 dans L, 4 dans M, 5 dans N, 21 dans O, & ainsi des autres, vous aurez la disposition du quarré magique impair de 25, telle qu'elle est rapportée ci-dessus.

Pages 83. & 84.

Vous auriez une autre disposition des nombres dans les cases, si en commençant par la case unique hors du quarré d'en haut, au lieu de placer les nombres en tirant vers la droite, vous les placiez en tirant vers la gauche, mettant 2 dans la case où se trouve 6, mettant 13 dans celle qui est occupée par 11, &c.

Observez généralement que les nombres des cases uniques hors du quarré, comme E, F, G, H, se doivent trouver dans les cases vuides les plus proches, mais au-delà de celle qui est au centre; comme on le voit dans le quarré précédent, où 1 qui est dans E, se trouve dans M; 21 qui est dans F, se trouve dans O; 5 qui est dans G, se trouve dans N, &c. Ce que l'on peut encore remarquer plus exactement dans le quarré suivant, qui est celui de 49, où 1 qui est dans E case hors du quarré, se trouve près, mais au-delà de 25, qui est au centre du quarré, & où le nombre 9 qui est au-dessous de l'unité dans une case hors du quarré, se trouve plus loin & au-delà de 25 dans une case du quarré. On doit faire la même remarque à l'égard des autres nombres qui se trouvent dans les cases hors du quarré.

Digitized by Google



22	47	16	41	10	35	4
5	23	48	17	42	11	29
30	6	24	49	18	36	12
13	31	7	25	43	19	37
38	14	32	1	26	44	20
21	39	8	33	2	27	45
46	15	40	9	34	3	28

La diſpoſition ſeroit encore différente, ſi on commençoit à mettre l'unité dans quelque autre caſe unique hors du quarré, & qu'on continuât à écrire les autres nombres dans l'ordre qu'on a in-

diqué, les nombres du quarré impair ſe trouveroient dans d'autres caſes, & donneroient par conſéquent pluſieurs diſpoſitions différentes du quarré impair.

Ce ne ſont point là les ſeules variétés qu'on peut trouver dans le Quarré Magique impair. Il n'eſt pas néceſſaire de commencer par l'unité, on peut encore commencer par tel nombre qu'on voudra choiſir, comme par 7, & pourſuivre les nombres juſqu'à ce qu'il y en ait aſſez pour remplir les caſes du quarré.

Ce qui donneroit cet autre quarré Magique.

				7				
			12		8			
		17		13		9		
	22		18		14		10	
27		23		19		15		11
	28		24		20		16	
		29		25		21		
			30		26			
				31				

17	30	13	26	9
10	18	31	14	22
23	11	19	27	15
16	24	7	20	28
29	12	25	8	21

Digitized by Google

Non-ſeulement on peut ſe ſervir des nombres pris ſelon leur ſuite naturelle, quels qu'ils ſoient, pourvû qu'ils puiſſent remplir un quarré de caſes impaires, on peut encore en prendre d'autres, mais il faut qu'ils ſoient dans une Progreſſion Arithmétique, comme celle-ci qui commence par 13, 17, 21, &c. dont la différence eſt 4, & qui donne ce quarré impair. Car en quelque ſens qu'on prenne les bandes & les diagonales, la ſomme de chacune ſera 305.

53	105	37	89	21
25	57	109	41	73
77	29	61	93	45
49	81	13	65	97
101	33	85	17	69

Les termes du Quarré Magique de 49, peuvent avoir d'autres diſpoſitions magiques, telles que ſont les ſuivantes: nous les avons trouvé par une autre maniere, qui n'étant pas ſi aiſée que la précédente, ne ſera pas ici expliquée, parce qu'elle eſt trop difficile pour être inſérée dans les Recréations Mathématiques.

3	10	25	56	11
20	8	19	12	6
5	9	13	17	21
22	14	7	18	4
15	24	1	2	23

12	25	6	19	3
5	11	24	8	17
16	4	13	22	10
9	18	2	15	21
23	7	20	1	14

Digitized by Google

1	20	23	16	5
4	18	9	12	22
15	7	13	19	11
24	14	17	8	2
21	6	3	10	25

11	24	17	10	3
4	12	25	18	6
7	5	13	21	19
20	8	1	14	22
23	16	9	2	5

11	22	9	20	3
2	14	25	8	16
19	5	13	21	7
10	18	1	12	24
23	6	17	4	15

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

REMARQUES.

LE Quarré a été appellé *Magique*, parce qu'il étoit en grande vénération parmi les Egyptiens, & les Pythagoriciens leurs Disciples, qui pour donner plus d'efficace & de vertu à ce quarré le dédioient aux sept Planetes en différentes manieres, & le gravoient sur une lame du métal qui simpatisoit avec la Planete, à laquelle il étoit dédié. Ils l'enfermoient dans un polygone régulier, inscrit dans un cercle divisé en autant de parties égales que le côté du quarré avoit d'unités, avec les noms des Anges de la Planete, & des Signes du Zodiaque, qu'ils écrivoient dans les espaces vuides entre le polygone & la circonférence du cercle circonscrit; croyant par une vaine supersti-

Digitized by Google

tion qu'une telle médaille ou talifman, étoit favorable à celui qui la portoit fur foi en tems & lieu.

Ils attribuoient à Saturne le quarré de 9 cafes, qui a 3 pour racine, & 15 pour la fomme des nombres de chaque bande. A Jupiter le quarré de 16 cafes, qui a 4 pour côté, & 34 pour la fomme des nombres de chaque bande. A Mars le quarré de 25 cafes, qui a 5 pour côté, & 65 pour la fomme des nombres de chaque bande. Au Soleil le quarré de 36 cafes, qui a 6 pour côté, & 111 pour la fomme des nombres de chaque bande. A Venus le quarré de 49 cafes, qui a 7 pour côté, & 175 pour la fomme des nombres de chaque bande. A Mercure le quarré de 64 cafes, qui a 8 pour côté, & 260 pour la fomme des nombres de chaque bande. A la Lune le quarré de 81 cafes, qui a 9 pour côté, & 369 pour la fomme des nombres de chaque bande.

Enfin ils attribuoient à la matiere imparfaite le quarré de 4 cafes, qui a 2 pour côté, & à Dieu le quarré, d'une feule cafe qui a pour côté l'unité, qui étant multipliée par elle-même, ne change pas. Par le moyen de ce Problême, nous réfoudrons cette

QUESTION.

Difpofer en trois rangs les neuf premieres Cartes, depuis l'As jufqu'au Neuf, de forte que tous les points de chaque rang pris en long ou en large, ou en diagonale, faffent enfemble une même fomme.

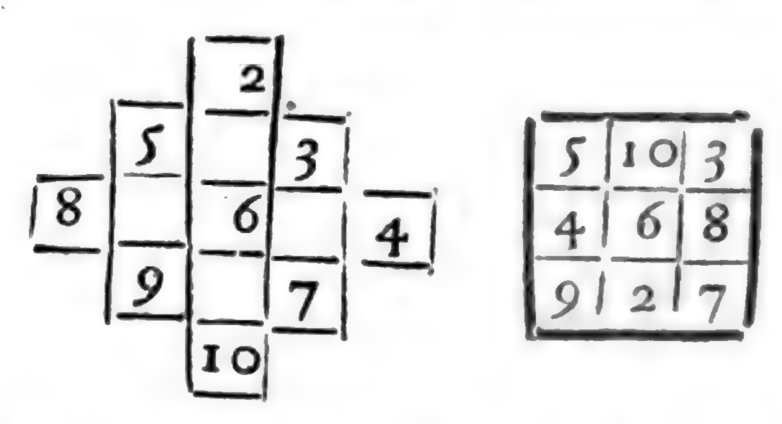
On difpofera magiquement les neuf premiers nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,

comme vous voyez ici, par la Méthode que nous avons enſeignée. Alors on connoîtra que les Cartes marquées des mêmes points qui ſont les chifres de chaque caſe, doivent être rangées de la même façon, afin que la ſomme de tous les points de chaque rang ſoit par tout le même ſçavoir, 15.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Voici de quelle maniere on diſpoſera ces cartes, pour les ranger comme elles le ſont dans le quarré magique précédent.

Au lieu de prendre les neuf premieres cartes, on en pourroit prendre neuf autres, pourvû qu'elles fuſſent de ſuite, comme celle-ci, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 : alors elles auroient cette diſpoſition, & la ſomme de chaque bande ou diagonale ſeroit 18. On peut encore laiſſer le 2, & prendre le valet, en le faiſant valoir 11, &c.



5	10	3
4	6	8
9	2	7

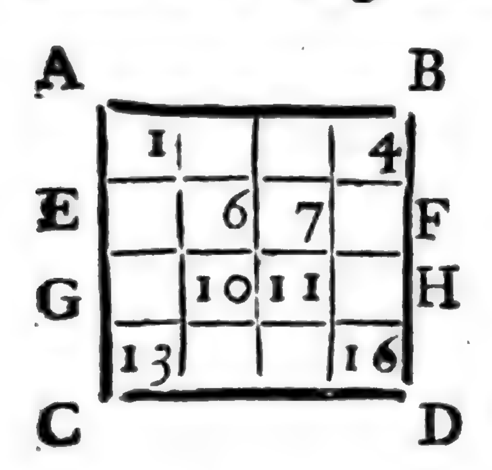
Des Quarrés Magiques pairs formés par des termes en Progreſſion Arithmétique.

LA Régle qu'on vient d'enſeigner, eſt générale pour diſpoſer facilement toutes ſortes de quarrés impairs. Il n'en eſt pas de même pour les

Digitized by Google

quarrés pairs. Ceux-ci ont des regles particulieres, quoique fondées sur une démonstration générale. Le quarré 4 ne peut être disposé magiquement : le quarré de 16 est celui de tous les quarrés pairs qui le peut être plus aisément. C'est même par lui qu'on doit commencer, quand on veut disposer magiquement un plus grand quarré pair. Voici ce qu'il faut faire.

Ayant fait un quarré ABCD, on remplira d'abord les diagonales AD, BC. Pour y réussir, on commencera par compter les nombres suivant leur suite naturelle 1, 2, 3, 4, &c. sur les cases de la premiere bande AB de gauche à droite, & on ne marquera que 1 & 4 dans les cases A & B, qui appartiennent aux diagonales : on comptera ensuite les autres nombres 5, 6, 7, 8, sur les cases de la seconde Bande EF de gauche à droite, & l'on ne marquera que 6 & 7 dans les cases qui appartiennent aux diagonales : puis on comptera 9, 10, 11, 12, sur les cases de la troisiéme bande GH de gauche à droite, & l'on ne marquera que 10 & 11 dans les cases qui appartiennent aux diagonales. Enfin on comptera 13, 14, 15, 16, sur les cases de la quatriéme bande CD de gauche à droite, & l'on ne marquera que les nombres 13 & 16 dans les cases C & D, qui appartiennent aux diagonales.



Ces diagonales étant ainsi remplies, on remplira les cases vuides : on commencera par compter les nombres suivant leur ordre naturel 1, 2, 3, 4, sur les cases de la bande DC, en commen-

çant par la caſe D, & allant ici de droite à gauche, & l'on écrira le 2 & le 3 dans les caſes vuides : on continuera de même par les bandes HG, FE & BA, en allant toujours de droite à gauche. Le quarré ſera rempli de maniere que la ſomme de chaque bande & de chaque diagonale ſera 34, en quelque ſens qu'on les prenne.

A B

	1	15	14	4	
E	12	6	7	9	F
G	8	10	11	5	H
	13	3	2	16	

C D

On voit bien que pour donner quelque variété à ce quarré pair, on pourroit commencer à compter par la caſe B, & aller de droite à gauche, pour remplir les diagonales, & puis commencer à compter à la ſeconde repriſe par la caſe C, & aller de gauche à droite pour remplir les caſes vuides. En un mot, on peut commencer par telle caſe de la diagonale qu'on voudra, & aller de droite à gauche, ou de gauche à droite, de haut en bas, ou de bas en haut; mais quand on a commencé à compter d'une façon pour remplir les diagonales, il faut aller d'un ſens oppoſé & contraire pour remplir les caſes du milieu. Au reſte, ce ne ſont pas là les ſeules variétés dont eſt ſuſceptible le quarré de 16, on ſera peut-être étonnné d'entendre dire, qu'il peut recevoir 880 diſpoſitions différentes. Nous avons donné la maniere la plus aiſée.

Il n'eſt point néceſſaire que les nombres du quarré pair commencent par l'unité, on peut prendre 16 nombres de ſuite, comme 11, 12, 13, 14, &c. que l'on diſpoſera magiquement par la méthode qu'on vient d'enſeigner.

11	25	24	14
22	16	17	19
18	20	21	15
23	13	12	26

Ce

Ce quarré de 16 est le fondement du quarré de 36. Car quand on a formé ce quarré de 16, dont on a pris les termes qui sont le plus au milieu de 36, on forme une enceinte à l'entour dans laquelle on dispose les dix premiers nombres, & les dix derniers de 36; de telle sorte que les deux qui correspondent dans le même rang ou dans la même diagonale, fassent la somme de 37. Ce que l'on peut examiner dans ce quarré de 36, où la somme de chaque bande & de chaque diagonale est 111.

1	35	34	30	5	6
33	11	25	24	14	4
8	22	16	17	19	29
28	18	20	21	15	9
10	23	13	12	26	27
31	2	3	7	32	36

Pour avoir les 16 nombres qui sont le plus au milieu de 36, il faut ôter 16 de 36, & diviser le reste 20 par 2, le quotient 10 marque qu'il faut rejetter les premiers & les derniers 10 de 36; ainsi les 16 nombres commenceront à 11, & finiront à 26.

Je ne crois pas qu'il soit nécessaire d'avertir, qu'au lieu des nombres, dont la suite est naturelle, on peut choisir d'autres nombres qui soient dans une Progression Arithmétique. C'est une remarque qui a été faite pour les quarrés impairs, & qui convient aussi aux quarrés pairs.

On a mis ici le quarré de 64, qui a été fait à peu près de la même maniere que le quarré de 36; la somme de chaque rang & de chaque diagonale du quarré de 64, est de 260.

1	63	62	4	6	56	60	8
58	15	49	48	44	19	20	7
54	47	25	39	38	28	18	11
53	22	36	30	31	33	43	12
13	42	32	34	35	29	2[illegible]	52
10	24	37	27	26	40	41	55
14	45	16	17	21	46	50	51
57	2	3	61	59	9	5	64

Des quarrés Magiques pairs formés par des termes en Progression Géométrique.

AU lieu de la Progression Arithmétique, on peut prendre une Progression Géométrique, par exemple, cette Progression double 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, & alors il arrivera que neuf termes étant disposés magiquement, le produit qui viendra en multipliant ensemble ceux qui sont dans chaque rang, & dans chaque diagonale, sera 4096, qui est le cube du terme moyen 16.

8	256	2
4	16	64
128	1	32

Il n'y a point de regle pour les quarrés en Progression Géométrique, différente de celle que l'on

à enseigné pour les quarrés en Progression Arithmétique. Ainsi on connoîtra aisément que le quarré précédent est formé selon ce qui a été dit touchant les quarrés impairs, dont les termes sont en Progression Arithmétique. Il suffira d'en donner la figure, sans repeter le discours.

		1		
	8		2	
64		16		4
	128		32	
		256		

On peut encore former ce quarré impair, dont les termes seront les mêmes que ceux de cette Progression Géométrique 3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187, 6561, 19683, en suivant les mêmes regles.

		3		
	81		9	
2187		343		27
	6561		729	
		19683		

81	19683	9
27	343	2187
1561	3	729

Digitized by Google

Le produit des nombres de l'un des rangs, est 14348907 : il est égal au produit des nombres qui sont contenus dans chacun des autres rangs, ou dans chacune des diagonales. On conçoit que ces sortes de Quarrés Magiques peuvent recevoir toutes les varietés dont nous avons parlé dans le Quarré Magique de la Progression Arithmétique. Car on peut commencer par tel terme qu'il plaira de la Progression, comme par 1243, & continuer jusqu'à ce qu'il y ait assez de termes pour remplir les cases du quarré.

Voici un quarré impair, dont les termes commencent par 729.

19683	4782969	2187
6561	49049	531441
1594323	729	177147

Des quarrés Magiques pairs, dont les termes sont en Progression Géometrique.

IL n'y a rien à dire de particulier sur cette sorte de quarré, on se contentera de représenter un quarré pair de 16 cases ; il sera aisé d'y appliquer toutes les regles & les observations qu'on a fait sur ceux dont les termes sont en Progression Arithmétique. Ce quarré contient les 16 premiers termes de la Progression double 1, 2, 4, 8, &c. Le produit de chaque rang, ou de chaque diagonale en quelque sens qu'on les prenne, est 1073741824, quarré de 32768. Ce quarré

peut recevoir 880 diſpoſitions différentes, & donner le même produit. C'eſt une choſe très-digne de remarque.

1			8
	32	64	
	512	1024	
4096			32768

1	16384	8192	8
2048	32	64	256
128	512	1024	16
4096	4	2	32768

Des Quarrés Magiques en proportion harmonique.

NOus ajouterons ici cet autre quarré de neuf caſes, dont les nombres de chaque rang, de quelque maniere qu'on les prenne, c'eſt-à-dire, en long, en travers, ou en diagonale, ſont en proportion harmonique. On peut trouver autant d'autres nombres qu'on voudra qui auront la même proprieté, ſi au lieu des nombres précédens on met des lettres, comme vous voyez dans la Table ſui-

1260	840	630
504	420	360
315	280	252

vante, où les grandeurs littérales de chaque rang sont harmoniquement proportionnelles. C'est pourquoi en donnant aux trois lettres indéterminées a, b, c, des valeurs différentes, on aura en la place de ces quantités littérales des nombres qui conserveront de chaque rang la proportion harmonique.

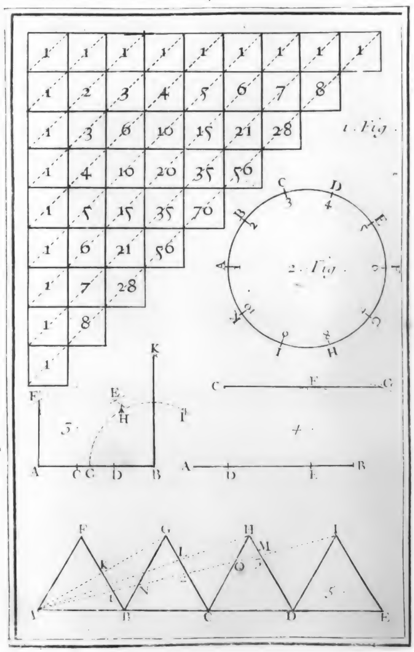
a	$\frac{2ac}{a+c}$	c
$\frac{2ab}{a+b}$	$\frac{2bc}{b+c}$	$\frac{2abc}{2ab+ac-bc}$
b	$\frac{2abc}{2ac+ab-bc}$	$\frac{abc}{ab+ac-bc}$

AVERTISSEMENT.

Ceux qui voudront être instruits plus à fonds des quarrés magiques, pourront consulter la Géométrique de M. Arnaud, les Elemens du P. Prestet, & principalement ce qui en a été dit dans les Ouvrages de Messieurs de l'Académie Royale des Sciences, imprimés en 1693.

Digitized by Google

Digitized by Google



Tome I. Planche 1.

Digitized by Google

PROBLEME XIII.

Du Triangle Arithmétique.

ON appelle *Triangle Arithmetique* la moitié d'un quarré divisé en plusieurs petits quarrés égaux, qui contiennent les unités, les nombres naturels 1, 2, 3, 4, &c. les nombres triangulaires, 1, 3, 6, 10, &c. qu'on a par l'addition continuelle des nombres précédens : les nombres pyramidaux 1, 4, 10, 20, &c. que donne l'addition continuelle des nombres triangulaires ; les nombres pyramido-pyramidaux, 1, 5, 15, 35, &c. qui viennent par l'addition continuelle des nombres pyramidaux, & ainsi de suite, comme vous voyez dans la Figure, qu'il suffit de regarder pour la comprendre. Plan. I. Fig. 1.

On appellera diagonale, ou base du Triangle Arithmétique, les quarrés qui sont traversés par une ligne ponctuée.

Entre les différens usages du Triangle Arithmétique, je ne parlerai que de ceux qui servent aux combinaisons, aux permutations & autres parties du Jeu, parce que les autres sont trop spéculatifs pour des Récréations Mathématiques.

Des Combinaisons.

NOus entendons ici par *Combinaisons*, tous les différens choix qu'on peut faire de plusieurs choses, dont le nombre est connu, en les prenant en diverses manieres, une à une, deux à deux, trois à trois, &c. sans changer à l'ordre.

Digitized by Google

I.

Si l'on propoſe quatre choſes différentes, exprimées par ces quatre lettres *a*, *b*, *c*, *d*, toutes les diverſes manieres d'en prendre, par exemple, deux différentes, ſçavoir, *ab*, *ac*, *ad*, *bc*, *cd*, ou trois différentes, ſçavoir, *abc*, *abd*, *acd*, *bcd*, s'appellent *Combinaiſons*. D'où il eſt aiſé de voir que quatre choſes propoſées peuvent être priſes une à une en quatre façons, deux à deux en ſix façons, trois à trois en quatre façons, & quatre à quatre en une maniere ſeulement. De ſorte que 1 ſe combine dans 4 quatre fois, 2, ſix fois; 3, quatre fois; & 4, une fois.

II.

Pour trouver dans un plus grand nombre de choſes différentes, par exemple, de ſept, les diverſes combinaiſons que l'on peut faire en les prenant diverſement, ſoit pour les ajouter enſemble, ou pour les multiplier, comme ſi l'on vouloit ſçavoir toutes les conjonctions poſſibles des ſept Planetes, en les prenant deux à deux, c'eſt-à-dire, ſi l'on vouloit ſçavoir combien de fois 2 ſe combine dans 7, ajoutez l'unité à chacun des deux nombres donnés 2, 7; pour avoir ces deux autres nombres 3, 8, qui font connoître que dans la troiſiéme caſe de bas en haut, ou de haut en bas, de la huitiéme diagonale du Triangle Arithmétique, on trouvera le nombre des combinaiſons qu'on cherche, ſçavoir, 21, qui marque les diverſes rencontres des ſept planetes conjointes deux à deux. Et pour connoître la huitiéme diagonale, & la troiſiéme caſe de cette diagonale, comptez huit dans le premier rang horiſontal marqué d'unités en com-

mençant par la gauche, ou dans le premier rang perpendiculaire, marqué aussi d'unités en commençant par le haut, puis prenez la troisiéme case en comptant par l'un ou l'autre de ces deux premiers rangs, & suivant la diagonale ponctuée.

Ou bien, parce que les deux nombres donnés sont 2, 7, & que le plus petit est 2, ajoutez ensemble tous les nombres du deuxiéme rang jusqu'à la septiéme diagonale, parce que le plus grand nombre donné est 7 sçavoir, 1, 2, 3, 4, 5, 6, & la somme 21 sera le nombre qu'on cherche.

III.

Si vous n'avez point de Triangle Arithmétique qui même peut manquer, lorsque le nombre des choses proposées passera 9, parce que nous ne l'avons pas prolongé au-delà, quoique cela soit facile, apprenez cette autre régle, qui est générale pour quelque nombre que ce soit.

Etant donnés, par exemple, les deux nombres 2, 7, pour sçavoir combien de fois le plus petit, 2 se combine dans le plus grand 7, faites des deux nombres donnés 2, 7, ces deux Progressions Arithmétiques 2, 1, & 7, 6, qui décroissent de l'unité, & qui ne doivent avoir que deux termes, sçavoir, autant que le plus petit nombre donné 2 comprend d'unités. Après cela multipliez ensemble les termes de chaque Progression, sçavoir, 7 par 6, & 2 par 1. Divisez le premier produit 42 par le second 2, & le quotient 21 sera le nombre des combinaisons de 2 en 7.

C'est par cette maniere, ou par la précédente, qu'on trouvera que 3 se combine dans 7, 35 fois, & 4 aussi 35 fois, que 5 s'y combine 21 fois, & 6 seulement 7 fois.

D'où il suit que le nombre de toutes les combinaisons qui se peuvent faire dans sept choses différentes en les prenant une à une, deux à deux, trois à trois, quatre à quatre, cinq à cinq, six à six, sept à sept, est 127, que l'on trouve en ajoutant tous les nombres particuliers des combinaisons 7, 21, 35, 21, 7, 1, qui conviennent aux nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

IV.

Mais cette somme 127 se peut trouver plus facilement, en faisant cette progression Géométrique double 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64; qui doit être composée de sept termes, parce que le nombre proposé des choses à combiner est 7. Car la somme 127 de tous ces termes sera le nombre qu'on cherche.

D'où il suit que pour avoir toutes les combinaisons de plusieurs choses proposées, il faut mettre autant de termes de la Progression double 1, 2, 4, &c. qu'il y a de choses proposées, & faire une somme de tous les termes; * cette somme donnera les différentes manieres, dont ces choses peuvent être combinées, en les prenant une à une, deux à deux, trois à trois, &c. Si on a proposé quatre choses différentes, il faut se servir des quatre premiers termes de la Progression double 1, 2, 4, 8, dont la somme * 15 montre que quatre choses peuvent être combinées en quinze manieres, en les prenant une à une, deux à deux, &c. S'il y a cinq choses proposées, il faut employer les cinq premiers termes de la Progression double 1, 2, 4, 8, 16, dont la somme * 31, fait connoître qu'on peut combiner cinq choses en trente-une manieres. Ainsi des autres.

* Problême XI. page 68.

Digitized by Google

REMARQUE.

Au lieu de prendre la ſomme des termes, on peut prendre le terme qui ſuit immédiatement le dernier terme donné, & le diminuer de l'unité ; le reſte ſera le nombre qui exprimera en combien de manieres on pourra combiner les choſes données. Ainſi dans le premier exemple de cet article IV. le terme qui ſuit 64 eſt 128, qu'il faut diminuer de l'unité ; ce reſte 127 eſt le nombre cherché. De même dans le ſecond exemple, le terme qui ſuit 16 eſt 32, qui diminué de l'unité donne 31 pour le nombre demandé.

V.

On peut encore trouver cette ſomme 127 plus facilement en cette ſorte. Otez l'unité du nombre propoſé 7, le reſte 6 fait voir qu'il faut prendre la ſixiéme puiſſance de 2, qui eſt 64, dont le double 128 étant diminué de l'unité, donnera 127 pour le nombre cherché.

VI.

J'ajouterai ici deux Méthodes particulieres aux deux nombres 2 & 3, pour trouver combien de fois ils ſe combinent dans un nombre propoſé qui doit être plus grand, par exemple, dans le même nombre donné 7.

Premierement, pour trouver combien de fois 2 ſe combinent dans 7, ôtez ce nombre 7 de ſon quarré 49, & 21, moitié du reſte 42, ſera le nombre des fois que 2 ſe combine dans 7.

Pour trouver combien de fois 3 ſe combine dans 7, ajoutez au cube 343 du nombre donné 7 le double 14 de ce même nombre 7, & ôtez de

la somme 357 le triple 147 du quarré 49 du même nombre 7, & 35 sixiéme partie du reste 210 sera le nombre des fois que 3 se combine dans 7.

VII.

Si on proposoit de combiner quatre choses, dont il y eût deux égales & deux différentes, exprimées par ces quatre lettres *a*, *a*, *b*, *c*, on voit bien qu'on les peut prendre une à une en trois façons *a*, *b*, *c*, deux à deux en quatre façons, *aa*, *ab*, *ac*, *bc*, trois à trois en trois façons, *aab*, *aac*, *abc*, & quatre à quatre en une seule façon, *aabc*. Ce qui fait qu'on les peut combiner en tout de 11 manieres différentes. Si on proposoit cinq choses, dont il y eût trois égales & deux différentes exprimées par ces lettres *a*, *a*, *a*, *b*, *b*, on peut les prendre une à une en deux manieres, *a*, *b*, deux à deux en trois manieres *aa*, *ab*, *bb*, trois à trois en trois manieres, *aaa*, *aab*, *abb*, quatre à quatre en deux manieres *aaab*, *aabb*, & cinq à cinq en une seule maniere seulement. Ce qui fait en tout 11 combinaisons.

VIII.

Si on veut sçavoir en combien de manieres se peuvent combiner quatre choses, comme *a*, *a*, *b*, *c*, dont deux sont les mêmes, & les deux autres sont différentes, voici ce qu'il faut faire; *a* étant deux fois parmi les choses données, on prendra ce nombre 2 qu'on gardera à part; on ajoutera l'unité à ce 2, & l'on aura 3, qui sera multiplié par le nombre des *b*, qui n'est ici qu'une fois parmi les choses données: ainsi l'on aura encore 3 qu'on conservera; on ajoutera ce 3 avec le 2 déja trouvé, on augmentera la somme 5 de l'unité, & l'on

aura 6 qui ſera multiplié par le nombre des *c*, qui n'eſt ici qu'une fois : ainſi l'on aura 6, que l'on ajoutera aux nombres conſervés 2, 3 ; la ſomme 11 montre qu'on peut combiner en onze manieres différentes ces quatre choſes, *a*, *a*, *b*, *c*.

De même, ſi on avoit propoſé ces huit choſes *a*, *a*, *a*, *b*, *b*, *c*, *c*, *c*, à cauſe que *a* eſt trois fois, on aura 3, que l'on conſervera; on ajoutera 1 à 3, la ſomme 4 ſera multipliée par 2 nombre des *b*, le produit 8 ſera conſervé ; on ajoutera enſemble 3, 8 & la ſomme 11 ſera augmentée de l'unité ; ce qui donnera 12 qu'on multipliera par 3 nombre des *c*. Le produit 36 ſera ajouté aux nombres conſervés 3, 8 ; la ſomme 47 montre que ces huit choſes propoſées peuvent être combinées en 47 manieres.

Mais les choſes données étant toutes égales, *a*, *a*, *a*, *a*, le nombre 4 des choſes données fait voir qu'on ne les peut prendre qu'en quatre manieres différentes, ſçavoir *a*, *aa*, *aaa*, *aaaa*.

IX.

On a vû dans les premiers articles que quatre choſes différentes, *a*, *b*, *c*, *d*, pouvoient être combinées en 15 manieres, on veut ſçavoir s'il n'y a point un autre nombre de choſes égales ou différentes qui puiſſent être combinées auſſi en quinze manieres. Ajoutez 1 à 15, vous aurez 16.

Premierement, ayant diviſé 16 par 4, il vient 4, qui étant diviſé par 2 donnera 2 ; ayant diviſé ce 2 par 2, il vient 1, qui ne peut plus être diviſé & qu'on néglige. Prenez les trois diviſeurs 4, 2, 2, ôtez de chacun l'unité, il reſtera 3, 1, 1, leſquels ajoutés font 5. Cette ſomme 5, & ces trois reſtes 3, 1, 1, montrent qu'on peut com-

biner en 15 manieres différentes 5 choses, dont trois sont égales, une différente, & une autre encore différente, comme *a*, *a*, *a*, *b*, *c*.

Secondement, après la premiere division de 16 par 4, on divisera le quotient 4 par 4; & il vient au quotient 1, qui ne pouvant plus être divisé, sera négligé. On prendra les deux diviseurs 4; 4, de chacun desquels ayant ôté l'unité, il viendra 3, 3, on ajoutera ces deux restes, & l'on aura 6. La somme 6 & les deux restes 3; 3, font voir qu'on peut combiner en 15 manieres six choses, dont trois sont égales, & trois autres sont encore égales, telles que sont *a*, *a*, *a*, *b*, *b*, *b*,

Troisiémement, on divisera 16 par 8, il viendra 2; ce quotient 2 divisé encore par 2 donnera 1 qui sera négligé. De chacun de ces diviseurs 8, 2, on ôtera l'unité; on ajoutera les restes 7, 1, ensemble, la somme 8, les restes 7, 1, montrent qu'on peut combiner en 15 manieres differentes huit choses, dont 7 seront égales, & une sera différente, comme *a*, *a*, *a*, *a*, *a*, *a*, *a*, *b*.

Quatriémement, on divisera 16 par 16, le quotient est 1 qu'on négligera. Le seul diviseur est 16, dont on ôtera l'unité; le reste 15 fait connoître qu'on peut combiner en quinze façons quinze choses égales, exprimées par ces caracteres, *a*, *a*, *a*, *a*, *a*, *a*, *a*, *a*, *a*, *a*, *a*, *a*, *a*, *a*, *a*.

Enfin si on divise 16 par 2, & son quotient 8 encore par 2, puis 4 par 2, & ce 2 par 2, on trouvera que quatre choses différentes peuvent être combinées en quinze manieres différentes, parce qu'il restera quatre unités, après avoir ôté l'unité des quatre diviseurs 2, 2, 2, 2.

REMARQUE.

On voit par cet Article IX, qu'on peut prendre tels diviseurs qu'on voudra, & les changer dans la suite de la division, jusqu'à ce qu'on soit parvenu à l'unité. On pourra examiner combien de choses peuvent être combinées un certain nombre de fois, comme 11 fois, 22 fois, &c. il faut toujours ajouter 1 au nombre proposé, comme si on propose 11, j'ajoute l'unité & je divise 12 ou par 6, ou par 4, ou par 3, ou par lui-même.

Pour donner plus de facilité à distinguer ces diviseurs, on écrira d'abord le nombre proposé, augmenté de l'unité, & au-dessous on écrira son diviseur, le quotient s'écrira à côté du nombre proposé dans une colonne séparée : le même diviseur ou un autre, s'écrira au-dessous de ce quotient, & le second quotient à côté du premier dans une troisiéme colonne ; le troisiéme diviseur s'écrira au-dessous de ce dernier quotient, & ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on soit parvenu à l'unité, comme on le voit dans ces Tables.

Nombre proposé augmenté de l'unité.	12.	6	3	1 Quotiens.
Premier diviseur.	2	2	3	Diviseurs.
	1	1	2	Diviseurs diminués de l'unité.

Même nomb. prop. augmenté de l'unité.	12	3	1	Quotiens.
Premier diviseur.	4	3		Diviseurs.
	3	2		Diviseurs diminués de l'unité.

Même nomb. prop. augmenté de l'unité.	12.	2	1	Quotiens.
Premier diviſeur.	6.	2		Diviſeurs.
	5	1		Diviſeurs diminués de l'unité.

Autre nomb. prop. augmenté de l'unité.	23	1	Quotiens.
Premier diviſeur.	23		Diviſeur unique.
	22		Diviſeur diminué de l'unité.

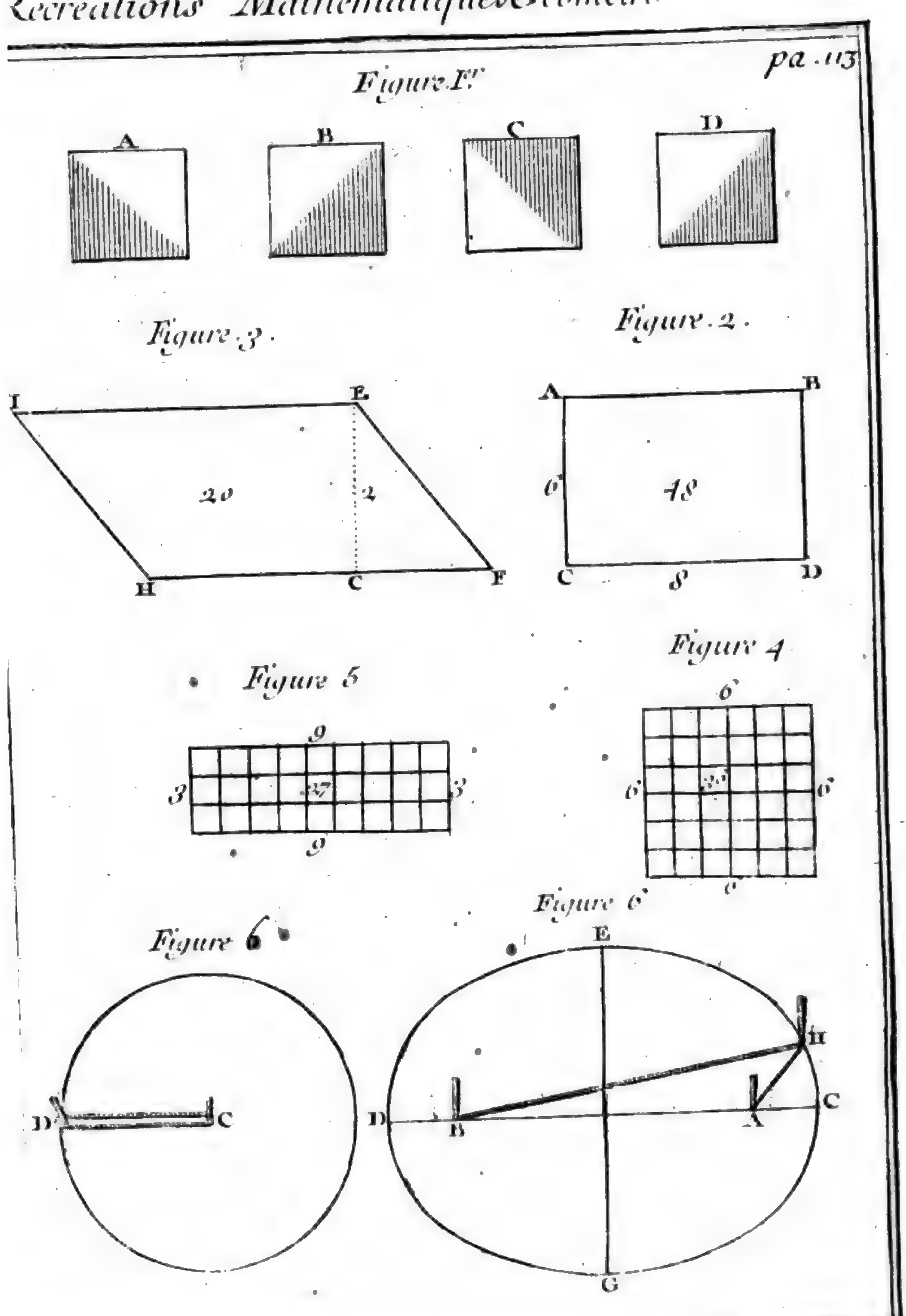
Ce dernier diviſeur 22 marque qu'il n'y a que 22 choſes égales qui puiſſent être combinées en 22 manieres différentes, puiſque le nombre 23 eſt un nombre premier.

On peut conſulter ce qu'on a dit des moyens de trouver toutes les parties aliquotes de quelque nombre donné. Ce ſera un éclairciſſement pour ce qu'on dit ici.

QUESTION I.

UN Quarreau mi-parti de deux couleurs par la diagonale, peut recevoir quatre poſitions différentes. Car l'angle coloré peut être en bas ou en haut, mais à main gauche : ce même angle peut être encore en haut & en bas, mais à main droite. Au lieu d'un Quarreau, on peut donc prendre quatre Quarreaux, & les regarder dans ces quatre ſituations différentes. Je nommerai ces quatre Quarreaux A, B, C, D. La regle des combinaiſons rapportée.

Digitized by Google



Digitized by Google

rapporté ci-dessus *art.* IV. fait connoître que ces quatre quarreaux peuvent être combinés en 15 manieres différentes. Car si on les prend un à un, l'on aura A, B, C, D, deux à deux on aura AB, AC, AD, BC, BD, CD, trois à trois on aura ABC, ABD, ACD, BCD, & quatre à quatre on aura seulement ABCD. Ceci n'est qu'une application des regles qu'on a données dans les cinq premiers articles précédens. Plan. 2. Fig. 1.

QUESTION II.

On propose de combiner quatre de ces mêmes quarreaux, dont deux A, A, sont égaux & les deux autres sont B & C. Suivant l'article VIII. on aura A, B, C, en les prenant un à un, AA, AB, AC, BC, en les prenant deux à deux, AAB, AAC, ABC, en les prenant trois à trois, & AABC, en les prenant quatre à quatre; ce qui donne onze manieres différentes de combiner les quarreaux A, A, B, C.

Des Permutations.

Il y a une autre sorte de changemens, que l'on peut appeller *Permutations*, où l'on prend les mêmes choses deux fois, comme si l'on veut combiner ces trois nombres 2, 5, 6, en les prenant deux à deux, pour sçavoir les différentes valeurs qu'ils peuvent produire. En considérant les deux premiers nombres en cette sorte, 25, on dira qu'ils font vingt-cinq, & en les considérant ainsi, 52, on prononcera qu'ils font 52. De même en considérant le premier & le troisiéme nombre en cette sorte 26; on connoîtra qu'ils font vingt-six,

& en les considérant ainsi, 62, on dira qu'ils sont soixante-deux; ainsi des autres: où vous voyez que le nombre des Permutations est double de celui des Combinaisons.

On se sert des Permutations, quand on veut faire des Anagrammes, où l'on fait quelquesois des rencontres heureuses, c'est-à-dire, qui conviennent à leur sujet.

On se sert aussi des Permutations dans le Jeu de Dez, pour connoître le nombre des hasards qu'auroit celui qui, avec deux Dez entreprendroit de faire, par exemple, 9. Il est certain qu'il auroit quatre hasards, parce que 9 se peut faire en quatre façons, sçavoir, par le 4 du premier Dé & le 5 du second, ou bien par le 5 du premier & le 4 du second, & encore par le 3 du premier Dé & le 6 du second, ou bien par le 6 du premier & le 3 du second.

I.

Plan. 1. Fig. 1.

Pour trouver avec le Triangle Arithmétique le nombre des permutations de plusieurs choses, on regardera le second rang perpendiculaire de ce Triangle comme étant le premier; on cherchera dans ce second rang le nombre des choses proposées; on ne fera attention qu'à la base dans laquelle il se trouvera. On multipliera ce nombre trouvé par l'unité; celui de la case suivante, qui sera regardé comme la deuxiéme, par 2; celui de la troisiéme case par 3 fois 2 ou 6; celui de la quatriéme case par 4 fois 6 ou 24; celui de la cinquiéme case par 5 fois 24 ou 120; celui de la sixiéme case par 6 fois 120 ou 720, & ainsi de suite, en multipliant toujours le nombre de la

case par le produit précédent. Le produit de chaque case de la base selon leur ordre, sera le nombre des permutations des choses proposées prises une à une, deux à deux, trois à trois, &c. Mais quand on sera parvenu à l'unité du premier rang parallele, on repetera le dernier nombre, qui sera aussi le nombre des permutations des choses prises selon le nombre qu'on les aura proposées. Un exemple éclaircira cette regle. Plan. 1. Fig. 1.

Supposant qu'on ait proposé quatre choses, *a*, *b*, *c*, *d*, pour sçavoir quel est le nombre de leurs permutations, on cherchera dans le second rang perpendiculaire le nombre 4; qui se trouve dans la base du cinquiéme Triangle. Ce nombre 4, multiplié par l'unité, est le nombre des permutations de ces quatre choses prises une à une. On multipliera ensuite le nombre 6 de la case suivante, qui est regardée comme la deuxiéme dans la même base par 2, le produit 12 sera le nombre des permutations des choses proposées prises deux à deux; puis on multipliera le nombre 4 de la troisiéme case de la même base par 3 fois 2 ou 6, le produit 24 est le nombre des permutations des choses proposées prises trois à trois: enfin comme on est parvenu à l'unité qui est dans le premier rang parallele, & qui est commune à la base du cinquiéme Triangle, on repetera le même produit qu'on vient de trouver, sçavoir, 24 qui sera aussi le nombre des permutations des choses prises quatre à quatre.

Si l'on veut sçavoir le nombre de toutes ces permutations, on ajoutera les produits trouvés 4, 12, 24, 24; leur somme 64 est le nombre de toutes ces permutations. C'est-à-dire, que quatre choses differentes peuvent recevoir 64 change-

Digitized by Google

mens différens, sans être prises deux fois dans aucune de ces permutations.

II.

Il n'est point nécessaire de se servir du Triangle Arithmétique, pour trouver toutes les permutations, ou les transpositions possibles de plusieurs choses, par exemple, de ces quatre lettres AMOR, prises quatre à quatre; on fera cette Progression Arithmétique 1, 2, 3, 4, composée d'autant de termes qn'il y a de lettres proposées, en sorte que le premier terme soit toujours l'unité, & que le dernier exprime le nombre des lettres: & alors en multipliant ensemble tous ces termes, le produit

AMOR	MARO	OAMR	ROMA
AMRO	MAOR	OARM	ROAM
AOMR	MOAR	OMAR	RMAO
AORM	MORA	OMRA	RMOA
ARMO	MRAO	ORAM	RAMO
AROM	MROA	ORMA	RAOM

24, sera le nombre des permutations, ou changemens différens que l'on peut faire des quatre lettres proposées AMOR, comme vous voyez ici.

III.

C'est de la même façon que l'on trouvera le nombre des permutations d'un autre multitude de lettres, sçavoir, en faisant une Progression d'autant de nombres naturels, 1, 2, 3, 4, 5, &c. qu'il y aura de lettres à combiner ensemble, & en multipliant ensemble tous les termes de cette Progression. Ainsi vous trouverez que cinq lettres se peuvent combi-

Digitized by Google

ner ſimplement, ou tranſpoſer en 120 manieres, ſix en 720, & ainſi des autres, comme vous voyez dans la table ſuivante, qui montre que les 23 lettres de l'Alphabeth ſe peuvent combiner en 25852016738884976640000 façons.

1	1. A
2	2. B.
3	6. C.
4	24. D.
5	120. E.
6	720. F.
7	5040. G.
8	40320. H.
9	362880. I.
10	3628800. K.
11	39916800. L.
12	479001600. M.
13	6227020800. N.
14	87178291200. O.
15	1307674368000. P.
16	20922789888000. Q.
17	355687428096000. R.
18	6402373705728000. S.
19	121645100408832000. T.
20	2432902008176640000. V.
21	51090942171709440000 X.
22	112400072777760780000. Y.
23	25852016738884976640000. Z.
24	620448401733239439360000.
25	15511210043330985984000000.

Cette Table eſt aiſée à conſtruire; car ayant connu, par exemple, que 4 lettres ſe peuvent combiner ou tranſpoſer en 24 façons, ſi l'on multiplie

Digitized by Google

ce nombre 24 des permutations par le nombre 5, qui suit immédiatement après le 4, on aura 120 pour le nombre des permutations de 5 lettres, lequel étant multiplié par le nombre suivant 6, on aura 720 pour le nombre des permutations de 6 lettres, lequel étant multiplié par le nombre suivant 7, le produit 5040 sera le nombre des permutations de 7 lettres, & ainsi de suite.

QUESTION I.

D'Où il suit que si on veut sçavoir en combien de manieres différentes sept personnes peuvent se ranger à table, il n'y a qu'à multiplier les premiers nombres naturels jusqu'à sept de cette sorte, 1 fois 2 fois 3 fois 4 fois 5 fois 6 fois 7. Le produit 5040 fait voir que sept personnes peuvent être rangées à une table en 5040 manieres différentes.

QUESTION II.

APrès avoir fait attention à ce que l'on vient de dire, on n'aura point de peine à croire que huit Enfans de Chœur puissent tellement changer de place au Chœur trois fois par jour, à Matines, à la Messe & à Vêpres, qu'ils seroient environ 37 ans à achever ces changemens différens. Il est vrai que c'est une chose surprenante; mais il est constant que huit choses peuvent recevoir quarante mille trois cens vingt changemens; & comme il s'en feroit trois par jour, si on divise 40320 par 3, on aura 13440 jours, qui font près de 37 ans, pendant lesquels il faudroit faire chaque jour trois changemens.

Digitized by Google

QUESTION III.

ON connoîtra par le même moyen que les huit mots de ce Vers fait à l'honneur de la Sainte Vierge, peuvent recevoir les mêmes chan-

Tot tibi ſunt dotes, Virgo, quot ſidera Cœlo.

gemens, étant pris huit à huit, ſi on ne ſe ſoucie pas d'obſerver la meſure du Vers : mais ſi on veut garder la meſure du Vers hexamétre, au lieu de 40320 permutations, ils n'en recevront que 3276. C'eſt-à-dire, que les mots de ce Vers pourront avoir 3276 ſituations, & conſerver dans chacune de ces ſituations la meſure du Vers hexamétre.

QUESTION IV.

LEs douze Apôtres ayant diſputé qui d'entr'eux ſeroit le premier ; Jeſus-Chriſt leur déclara que celui qui voudroit être le premier ſeroit le dernier, & que le dernier deviendroit le premier. Suppoſons qu'après cette leçon d'humilité chacun voulut céder la premiere place, la ſeconde & la troiſiéme place à ſon compagnon, & qu'ainſi ils euſſent réſolu de ne demeurer jamais enſemble dans une même diſpoſition, on demande en combien de manieres ils auroient pû changer de place, en ſorte qu'ils ne ſe fuſſent jamais rencontrés les uns à l'égard des autres dans la même ſituation. *Réponſe*. Ils auroient pû changer en quatre cens ſoixante-dix-neuf millions mille ſix cens manieres différentes.

Si l'on ſuppoſe que les onze Apôtres euſſent toujours obſervé de laiſſer la premiere place à ſaint Pierre, ils auroient pû changer de place en

trente-neuf millions neuf cens seize mille huit cens manieres différentes.

QUESTION V.

MAis ce qui paroîtra encore bien plus surprenant, c'est le calcul énorme qu'on va faire pour les differens changemens qui arriveroient à 24 noms qui ne rempliroient que deux lignes supposant qu'on pût écrire 1440 lignes en chaque feuille de papier, ou bien 720 fois ces 24 noms, & que chaque rame de papier fut tellement battue, qu'elle n'eût qu'un pouce d'épaisseur, je dis qu'il faudroit beaucoup plus de rames de papier pour écrire tous les changemens de ces 24 noms, qu'il n'en pourroit contenir depuis le centre de la terre jusqu'au firmament, en les mettant les unes sur les autres. Car supposant qu'il y a 28, 862, 640, 000, 000, de pouces du centre de la terre aux étoiles, il faudroit 1, 751, 245, 560, 364, 553, 942 rames de papier & plus pour écrire les 620448417332394393600000 changemens que peuvent recevoir ces 24 noms. Parce que chaque rame de papier contenant 500 feuilles, & chaque feuille 720 changemens, chaque rame de papier contiendroit 360000 de ces changemens. Or divisant les 24 nombres 620, &c. par celui que contiendroit chaque rame, il vient 1, 751, &c. qui est un nombre de pouces plus grand que celui qu'il y a depuis le centre de la terre jusqu'au firmament.

On voit aisément qu'il est impossible d'écrire toutes les permutations de ces 24 noms: car tous les Princes du monde ne pourroient payer le papier, quand la rame ne couteroit que 20 sols, & cent

Digitized by Google

mille Scribes feroient 336, 047, 223, 141 ans à écrire toutes les permutations de ces 24 noms, quand ils écriroient chacun une rame par femaine, & travailleroient nuit & jour ; en forte que chaque perfonne remplit 71 feuilles par jour, qui feroient cinq millions deux cens milles rames par an. Suppofons encore qu'on voulut donner à chacun de ces Scribes deux cens livres par an, ce feroit vingt millions par an, outre les cinq millions deux cens mille livres pour le papier. Comme il faudroit continuer cette dépenfe pendant 336, 047, 223, 141 ans, elle fe monteroit à la fomme de fix cens nonante-fix quintillons, fix cens fept quadrillons, fix cens vingt trillons, deux cens trente-un billons, cinq cens trente-deux millions de livres.

L'imagination fe perd dans ces fortes de fupputations, qui cependant font très-vraies, puifqu'elles font fondées fur les principes certains de l'Arithmétique.

QUESTION VI.

On veut fçavoir combien de permutations peuvent recevoir les quatre quarreaux A, B, C, D, mipartis de deux couleurs par la diagonale, pris un à un, deux à deux, trois à trois, & quatre à quatre. Pour y procéder avec ordre on cherchera toutes les combinaifons de ces quatre quarreaux, qu'on a trouvé être A, B, C, D, pris un à un, AB, AC, AD, BC, BD, CD, pris deux à deux, ABC, ABD, ACD, BCD, pris trois à trois, & ABCD, pris quatre à quatre. Il Il faut enfuite chercher combien peuvent recevoir de permutations ces quarreaux fuivant les quatre différentes combinaifons qu'on vient de voir.

Plan. 2. Fig. 1.

Plan. 2. Fig. 1. Les quatre premieres combinaiſons des quarreaux A, B, C, D, pris un à un, ne donnent point d'autres permutations; les ſix combinaiſons ſuivantes des quarreaux AB, AC, &c. pris deux à deux, en donnent chacune deux, *art.* III. & *queſt.* I. Ce qui fait 12 permutations. Les quatre combinaiſons des quarreaux ABC, &c. pris trois à trois, donnent chacune ſix permutations, *art.* III. ce qui fait 24 permutations. Enfin la ſeule combinaiſon des quarreaux ABCD pris quatre à quatre, donne encore 24 permutations, *art.* III. Si l'on ajoute toutes ces permutations 4, 12, 24, 24, elles feront la ſomme de 64. C'eſt-à-dire, que quatre quarreaux ABCD, pris un à un, deux à deux, trois à trois, & quatre à quatre, peuvent êtres changés en ſoixante-quatre manieres différentes.

QUESTION VII.

SI on veut que ces quarreaux ſoient pris deux à deux, & que chacun ſoit repeté, il eſt aiſé de connoître qu'il y aura ſeize permutations. Car par l'article II. ou III. des Combinaiſons, on trouve que 2 en quatre peut être combiné ſix fois; & par l'article II. & queſtion I. des Permutations, on ſçait que 1 choſes ne peuvent recevoir que 2 changemens; ainſi ces ſix combinaiſons donneront 12 permutations, auſquels ſi l'on joint les quatre AA, BB, CC, DD de chaque quarreau repeté, on aura ſeize Permutations.

REMARQUE.

Ce que l'on vient de dire des Combinaiſons jointes aux Permutations, fait entrevoir que qua-

Digitized by Google

tre quarreaux peuvent fournir des compartimens & des desseins à l'infini. C'est ce qu'a heureusement exécuté le Pere Douat dans un Traité très-curieux qu'il vient de faire paroître * sur un Mémoire que le Pere Sebastien Truchet présenta à l'Academie Royale des Sciences en 1704. On y verra que ces quatre quarreaux pris quatre à quatre, repetés & permutés, forment 256 figures différentes. On verra avec étonnement qu'en prenant ces 256 figures deux à deux, trois à trois, & ainsi de suite jusqu'à 256, on peut trouver un nombre prodigieux de compartimens, dont les desseins seront tous différens. On pourra s'exercer soi-même en faisant des quarreaux de cartons mi-partis de deux couleurs par la diagonale, & les disposant en toutes les façons qu'on imaginera.

* en 1722.

Cet Ouvrage n'est pas seulement curieux, il est encore très-utile, particulierement aux Architectes, qui y trouveront une source intarissable pour le Carrelage.

Des Partis du Jeu.

ON appelle *Parti* en matiere du Jeu, la juste distribution, ou le reglement de ce qui doit appartenir à plusieurs Joueurs de l'argent qui est au Jeu, & qu'ils jouent en un certain nombre de parties, proportionnellement à ce que chacun a droit d'esperer de la fortune par le nombre des parties qui lui manquent pour achever.

On suppose que deux Joueurs ont mis chacun 40 pistoles au Jeu. Dans ce cas cet argent ne leur appartient plus, parce qu'en le mettant au Jeu ils en ont quitté la propriété. Mais en revanche ils ont le droit d'attendre ce que le hazard peut leur

en donner, ſuivant les conditions dont ils ſont convenus avant que de jouer. On ſuppoſe encore qu'ils jouent 80 piſtoles en trois parties, que le premier ait une partie, & que le ſecond n'en ait point, c'eſt-à-dire, qu'il manque deux parties au premier pour gagner, & trois au ſecond. Enfin ſi les Joueurs veulent ſe ſéparer en renonçant à l'attente du haſard, pour rentrer chacun dans la propriété de quelque choſe, le premier à raiſon des 2 parties qui lui manquent, & le ſecond à raiſon des 3 parties qu'il lui faut pour gagner tout l'argent; on demande qu'elle eſt la portion que chacun des Joueurs doit retirer de l'argent qu'ils ont mis au Jeu. On peut trouver cette portion ou ce parti par le moyen du Triangle Arithmétique, en cette ſorte.

Parce que nous avons ſuppoſé qu'il manque au premier Joueur 2 parties; & 3 au ſecond pour gagner, & que la ſomme des deux nombres 2 & 3 eſt 5, il faut prendre dans la 5 la diagonale du Triangle Arithmétique, la ſomme 5 des deux premiers nombres 1, 4, à cauſe des deux parties qui manquent au premier Joueur, & la ſomme 11 des 3 autres 6, 4, 1, à cauſe des trois parties qui manquent au ſecond Joueur, & ces deux dernieres ſommes 5, 11, donneront la raiſon réciproque des deux partis qu'on cherche; de ſorte que le parti de celui à qui il ne manque que 2 parties eſt au parti de celui à qui il en manque 3, comme 11 eſt à 5.

Plan. 1. Fig. 1.

Mais pour déterminer ces deux partis, c'eſt-à-dire, pour aſſigner à chacun la part des 80 piſtoles qui ſont au Jeu, à raiſon des avantages qu'il a, il faut diviſer ce nomdre 80 en deux parties proportionnelles aux deux termes 11, 5; ce qui ſe fera en

multipliant séparément par ces deux termes 11, 5, le nombre 80 des pistoles qui sont au Jeu, & divisant chacun des deux produits 880, 400, par la somme 16 des deux mêmes termes 11, 5, on aura 55 pour le nombre des pistoles que doit emporter le premier Joueur qui a une partie, & 25 pour le nombre des pistoles que doit prendre le second Joueur qui n'a point de partie.

Pareillement s'il manque 1 partie au premier Joueur, & 2 au second pour gagner, on ajoutera ensemble ces deux nombres de parties 1, 2, & parce que leur somme est 3, on prendra dans la troisiéme diagonale du Triangle Arithmétique le seul & premier nombre 1, & la somme 3 des deux autres 2, 1 : ces deux nombres 1, 3, font connoître que le parti du premier Joueur est un parti du second, comme 3 à 1. Et parce que la somme de ces deux termes 1, 3, est 4, il s'ensuit que le premier Joueur doit avoir les $\frac{3}{4}$ des 80 pistoles qui sont au Jeu, & le second seulement $\frac{1}{4}$. Par conséquent il appartient 60 pistoles au premier Joueur, & 20 au second, dans la supposition que nous avons faite, qu'ils veulent se séparer sans continuer le Jeu.

Par-là vous voyez que si le Jeu est dans cet état, qu'il manque au premier Joueur une partie, & au second deux parties pour achever, le premier Joueur pourroit parier au pair 3 contre 1.

On peut résoudre ces sortes de questions sans le secours du Triangle Arithmétique, en cette sorte.

Puisqu'il manque au premier Joueur une partie pour achever, & qu'il en manque deux au second, on considerera que si les Joueurs continuoient de *1. Cas.*

Digitized by Google

jouer, & que le second gagnât une partie, il lui manqueroit comme au premier une partie pour achever, & que dans ce cas les deux Joueurs ayant des hasards égaux, leurs partis seroient aussi égaux par cette regle générale, qui porte, que le parti du premier Joueur est au parti du second, en même raison que le nombre des hazards qui peuvent faire gagner le premier, au nombre des hasards qui peuvent faire gagner le second. Ainsi dans cette supposition le parti de chacun seroit la moitié de l'argent qui est au Jeu.

Il est donc certain que si le premier gagne la partie qui se va jouer, tout l'argent qui est au Jeu lui appartiendra, & que s'il la perd, il ne lui en appartiendra que la moitié. C'est pourquoi s'ils veulent se séparer sans jouer cette partie, le premier doit avoir la moitié de l'argent qui est au Jeu & encore la moitié de la moitié du même argent, c'est-à-dire, qu'il doit avoir les $\frac{3}{4}$ de cet argent. Le reste $\frac{1}{4}$ appartiendra au second. Car il est évident que si un Joueur prétend une certaine somme en cas de gain, & une somme moindre en cas de perte, le sort étant égal son parti est que sans jouer, il lui appartient la moitié de ces deux sommes prises ensemble.

2. *Cas.* Ce premier cas servira à résoudre le suivant, qui suppose qu'il manque au premier Joueur une partie pour achever, & au second trois parties. Car si le premier gagne une partie, il doit emporter les 40 pistoles qui sont au Jeu, & s'il perd une partie, en sorte qu'il n'en faille plus que deux au second pour achever, il appartiendra au premier les $\frac{3}{4}$ de l'argent *par le premier Cas*. Ainsi

Digitized by Google

en ce gain, le premier emportera tout l'argent, & en cas de perte, il ne lui en appartiendra que les $\frac{3}{4}$. C'eſt pourquoi en cas de parti, il ne lui en doit appartenir que la moitié de ces deux ſommes priſes enſemble, c'eſt-à-dire, $\frac{7}{8}$, ou 70 piſtoles. Le reſte $\frac{1}{2}$, ou 10 piſtoles appartiendront au ſecond.

Ce ſecond cas ſervira de la même façon, à réſoudre le ſuivant, qui ſuppoſe qu'il manque deux parties au premier Joueur pour achever, & trois au ſecond. Car ſi le premier gagne une partie, il doit avoir les $\frac{7}{8}$ de l'argent qui eſt au Jeu, *par le 2 cas*; & s'il perd une partie, en ſorte qu'il n'en faille plus que deux au ſecond pour gagner, ſçavoir, autant qu'il en manque au premier, chacun doit avoir pour ſon parti la moitié de l'argent qui eſt au Jeu. C'eſt pourquoi en cas de gain, le premier emportera $\frac{7}{8}$ de l'argent qui eſt au Jeu, & $\frac{1}{2}$ en cas de perte, & ainſi en cas de parti il ne lui doit appartenir que la moitié de ces deux ſommes priſes enſemble, c'eſt-à-dire, $\frac{10}{11}$, ou 55 piſtoles. Le reſte $\frac{5}{16}$, ou 25 piſtoles appartiendront au ſecond. *3. Cas.*

Le ſecond cas ſervira encore à réſoudre ce quatriéme, qui ſuppoſe qu'il manque au premier Joueur une partie pour achever, & quatre au ſecond. Car ſi le premier gagne une partie, il remportera les 80 piſtoles qui ſont au Jeu, & s'il en perd une, en ſorte qu'il n'en faille plus que trois au ſecond pour achever, il appartiendra au premier les $\frac{7}{8}$ de tout l'argent, *par le 2. cas*. Ainſi puiſqu'en cas de gain, le premier doit emporter *4. Cas.*

Digitized by Google

tout l'argent, & qu'en cas de perte il n'en doit emporter que les $\frac{7}{8}$; en cas de parti il ne lui doit appartenir que la moitié de ces deux sommes prises ensemble, c'est-à-dire, $\frac{15}{16}$, ou 57 pistoles. Le reste $\frac{1}{16}$, ou 5 pistoles appartiendront au second.

5. *Cas.* Ce quatriéme cas & le troisiéme serviront de la même façon à résoudre le suivant, qui suppose qu'il manque deux parties au premier Joueur pour achever, & quatre au second. Car si le premier gagne une partie, en sorte qu'il ne lui en manque plus qu'une pour achever, il doit remporter les $\frac{15}{10}$ de l'argent qui est au Jeu, *par le 4. Cas*, & s'il en perd une, en sorte qu'il n'en manque plus que trois au second, il doit en remporter seulement les $\frac{11}{10}$, *par le 3. Cas.* Ainsi puisqu'en cas de gain le premier doit remporter les $\frac{15}{16}$ de tout l'argent, & seulement les $\frac{1}{16}$ en cas de perte, il doit en cas de parti prendre la moitié de ces deux sommes prises ensemble, c'est-à-dire. $\frac{13}{16}$, ou 65 pistoles. Le reste $\frac{3}{16}$. ou 15 pistoles, appartiendront au second. Ainsi des autres.

Autrement & plus facilement.

TOus les cas précédens, & tous les autres infinis qui peuvent arriver, peuvent encore se résoudre autrement sans le secours du Triangle Arithmétique, & plus facilement en cette sorte.

5. *Cas.* Pour résoudre, par exemple, le cinquiéme cas; où

où l'on ſuppoſe qu'il manque deux parties au premier Joueur pour achever, & 4 au ſecond, de ſorte qu'il leur manque enſemble 6 parties pour achever, ôtez 1 de cette ſomme 6, & parce qu'il reſte 5, on ſuppoſera ces cinq lettres ſemblables *aaaaa* favorables au premier Joueur, & pareillement ces cinq lettres ſemblables *bbbbb* favorables au ſecond Joueur. On combinera enſemble ces dix lettres, comme vous le voyez dans cette Table, ou des 32 combinaiſons, les 26 premieres vers la gauche, où ſe rencontre au moins deux *a*, ſeront priſes pour le nombre des hazards qui peuvent faire gagner le premier, parce qu'il lui manque deux parties : & les ſix dernieres vers la droite, où il y a au moins quatre *b*, ſeront priſes pour le nombre des hazards qui peuvent faire gagner le ſecond, parce qu'il lui manque quatre parties.

aaaaa	*aaabb*	*aabbb*	*abbbb*
aaaab	*aabba*	*abbba*	*bbbba*
aaaba	*abbaa*	*bbbaa*	*babbb*
aabaa	*bbaaa*	*ababb*	*bbabb*
abaaa	*aabab*	*abbab*	*bbbab*
baaaa	*abaab*	*ababb*	*bbbbb*
	baaab	*baabb*	
	baaba	*babba*	
	babaa	*bbaba*	
	ababa	*babab*	

Ainſi le parti du premier Joueur ſera au parti du ſecond, comme 26 eſt à 6, ou comme 13 eſt à 3, &c.

Pareillement pour réſoudre le troiſiéme Cas, où l'on ſuppoſe qu'il manque deux parties au premier joueur pour achever, & trois parties au ſe-

cond, de ſorte qu'il leur manque enſemble 5 parties pour achever, ôtez 1 de cette ſomme 5, & parce qu'il reſte 4, ſuppoſez ces quatre lettres ſemblables *aaaa* favorables au premier, & ces quatre lettres ſemblables *bbbb* favorables au ſecond. Combinez enſemble ces huit lettres, comme vous le voyez dans cette Table, ou des 16 combinaiſons, les 11 premieres à la gauche, où il y a au moins deux *a*, ſeront priſes pour le nombre des hazards qui peuvent faire gagner le premier, parce qu'il lui manque deux parties: & les 5 dernieres vers la droite, où il y a au moins trois *b*, ſeront priſes pour le nombre des hazards qui peuvent faire gagner le ſecond, parce qu'il lui manque trois parties. Ainſi le parti du premier Joueur eſt au parti du ſecond, comme 11 eſt à 5, &c.

aaaa	*aabb*	*abbb*
aaab	*abba*	*bbba*
aaba	*bbaa*	*bbab*
abaa	*baab*	*babb*
baaa	*baba*	*bbbb*
	abab	

4. Cas. Enfin pour réſoudre le quatriéme Cas, où l'on a ſuppoſé qu'il manquoit au premier Joueur une partie pour achever, & quatre au ſecond, il vient la même ſomme 5 des parties qui manquent enſemble à ces deux Joueurs, on ſe ſervira des 16 combinaiſons précédentes, entre leſquelles on en trouvera 15, où il y a au moins une lettre *a*, parce qu'il manque au premier Joueur une partie, pour le nombre des hazards qui le peuvent faire gagner, & ſeulement une, où il y a quatre *b*, parce qu'il manque au ſecond Joueur quatre parties, pour un ſeul hazard qui le peut faire gagner; de ſorte que le parti du même Joueur eſt au parti du ſecond, comme 15 eſt à 1. Ainſi des autres.

Digitized by Google

Du Jeu des Dez.

POur ſçavoir entre deux Joueurs l'avantage que peut avoir celui qui entreprend d'amener, par exemple, 6 avec un Dé en certain nombre de coups, & premierement au premier coup, on conſidérera que le parti à l'entreprendre du premier coup eſt de 1 contre 5, parce que celui qui tient le Dé, n'a qu'un hazard pour gagner, & qu'il en a cinq pour ne rien gagner. Par conſéquent pour l'entreprendre en un ſeul coup, il ne doit mettre que 1 contre 5, ou ce qui eſt la même choſe, parier 1 contre 5. Ce qui fait voir que d'entreprendre d'amener 6 avec un Dé en un coup il y a deſavantage.

Pour entreprendre d'amener 6 en deux coups avec un Dé, on conſiderera que c'eſt la même choſe que d'entreprendre en jettant deux Dez à la fois d'en trouver un marqué 6. Alors celui qui tient le Dé n'a que 11 hazards pour gagner: car il peut amener 6 avec le premier Dé, & 1, 2, 3, 4, 5, avec le ſecond: ou bien 6 avec le ſecond Dé, & 1, 2, 3, 4, 5, avec le premier: ou bien encore 6 avec chaque Dé. Mais il y a 25 ha-

1, 1	2, 1	3, 1	4, 1	5, 1	6 – 1
1, 2	2, 2	3, 2	4, 2	5, 2	6 – 2
1, 3	2, 3	3, 3	4, 3	5, 3	6 – 3
1, 4	2, 4	3, 4	4, 4	5, 4	6 – 4
1, 5	2, 5	3, 5	4, 5	5, 5	6 – 5
					6 – 6

zards pour ne rien gagner, comme vous voyez ici. D'où il eſt aiſé de conclure, que celui qui entreprend en deux coups d'amener 6 avec un Dé, ne

doit mettre que 11 contre 25, & qu'ainsi il y a désavantage de l'entreprendre au pair.

Vous prendrez garde que la somme 36 de tous les hazards, 11, 25, est le quarré du nombre donné 6, quand on entreprend d'amener 6 en deux coups avec un Dé: & que le nombre 25 des hazards qui peuvent empêcher celui qui tient le Dé de gagner, est le quarré du même nombre donné 6 moins 1, c'est-à-dire, de 5. C'est pourquoi pour trouver le nombre des hazards favorables à celui qui tient le Dé, il n'y a qu'à ôter 1 du double 12 du nombre donné 6, & le reste 11 sera le nombre qu'on cherche; on ôtera ce reste 11 de 36 quarré du même nombre donné 6: ce second reste 25 qui sera toûjours un nombre quarré, sera le nombre des hazards contraires à celui qui tient le Dé.

Pour entreprendre d'amener 6 en trois coups avec un Dé, on considerera pareillement que c'est la même chose que d'entreprendre en jettant trois Dez à la fois, d'en trouver un marqué 6. Alors celui qui tient le Dé a 91 hazards favorables, & 125 contraires, & ainsi il ne doit mettre que 91 contre 125, où vous voyez qu'il y a encore désavantage à entreprendre au pair d'amener 6 en trois coups avec un Dé.

Vous remarquerez que la somme 216 de tous les hazards 91, 125, est le cube du nombre donné 6, quand on entreprend d'amener 6 en trois coups avec un Dé, & que le nombre 125 des hazards contraires à celui qui tient le Dé, est le cube du même nombre donné 6 moins 1, c'est-à-dire de 5. C'est pourquoi pour trouver le nombre des hazards qui peuvent faire gagner celui qui tient le Dé, il n'y a qu'à ôter du cube 216 du

nombre donné 6, le cube 125 du même nombre donné 6 moins 1, ou de 5.

C'est de la même façon qu'on trouvera l'avantage que peut avoir celui qui entreprendroit en quatre coups d'amener 6 avec un Dé. Car si l'on ôte de la quatriéme puissance, ou du quarré-quarré 1296 du nombre donné 6, le quarré-quarré 625 du même nombre donné 6 moins 1, ou de 5, le reste donnera 671 hazards favorables à celui qui tient le Dé : & le plus petit quarré-quarré précédent 625, sera le nombre des hazards contraires à celui qui tient le Dé. Où vous voyez que celui qui entreprend en quatre coups d'amener 6 avec un Dé, peut mettre 671 contre 625, & qu'ainsi il y a avantage à l'entreprendre au pair.

L'avantage sera plus grand à entreprendre d'amener 6 en cinq coups avec un Dé, comme on le connoîtra en ôtant de la cinquiéme puissance, ou sursolide 7776 du nombre donné 6, le sursolide 3125 du même nombre donné 6 moins 1, ou de 5. Car le reste 4651 sera le nombre des hazards favorables à celui qui tient le Dé, & le plus petit sursolide précédent 3125 sera le nombre des hazards contraires à celui qui tient le Dé. Où l'on voit que celui qui entreprend en cinq coups d'amener 6 avec un Dé, peut mettre 4651 contre 3125, & qu'ainsi il y a de l'avantage à l'entreprendre au pair.

Si vous voulez sçavoir le parti de celui qui voudroit entreprendre d'amener en un coup avec deux ou plusieurs Dez une Rafle déterminée, par exemple, Terne, vous considererez que s'il l'entreprenoit avec deux Dez, il n'auroit qu'un hazard pour gagner, & 35 pour perdre : parce que deux Dez peuvent se combiner en 36 façons différentes, c'est-

à-dire, que leurs faces qui sont au nombre de 6, peuvent avoir 36 assietes différentes, comme vous le voyez dans cette Table, ce nombre 36 étant le

1, 1	2, 1	3, 1	4, 1	5, 1	6, 1
1, 2	2, 2	3, 2	4, 2	5, 2	6, 2
1, 3	2, 3	3, 3	4, 3	5, 3	6, 3
1, 4	2, 4	3, 4	4, 4	5, 4	6, 4
1, 5	2, 5	3, 5	4, 5	5, 5	6, 5
1, 6	2, 6	3, 6	4, 6	5, 6	6, 6

quarré du nombre 6 des faces des deux Dez. S'il y avoit trois Dez au lieu de 36 quarré de 6, on auroit le cube 216 pour le nombre des combinaisons entre trois Dez, & s'il y avoit quatre Dez, on auroit le quarré-quarré 1296 de même nombre 6, pour le nombre des combinaisons entre quatre Dez, & ainsi de suite.

D'où il suit qu'on ne doit mettre que 1 contre 35, pour faire une Rafle déterminée avec deux Dez en un coup. On connoîtra par un semblable raisonnement, qu'on ne doit mettre que 3 contre 213, pour faire une Rafle déterminée avec trois Dez en un coup, & 6 contre 1290, ou 1 contre 215 avec quatre Dez, & ainsi de suite: parce que des 216 hazards qui se trouvent entre trois Dez, il y en a 3 pour celui qui tient le Dé, puisque trois choses se peuvent combiner deux à deux en trois façons, & par conséquent 213 contraires à celui qui tient le Dé, & que des 1296 hazards qui se trouvent entre quatre dez, il y en a six qui sont favorables à celui qui tient le Dé, puisque quatre choses se combinent deux à deux en six façons, & par conséquent 1290 contraires à celui qui tient le Dé.

Digitized by Google

Mais si vous voulez sçavoir le parti de celui qui entreprendroit de faire une Rafle quelconque du premier coup avec deux ou plusieurs Dez, il ne sera pas difficile de connoître qu'il doit mettre 6 contre 30, ou 1 contre 5 avec deux Dez; parce que si des 36 hazards qui se trouvent entre deux Dez, on ôte 6 hazards qui peuvent produire une Rafle, il reste 30. On connoîtra aussi aisément qu'avec taois Dez il peut mettre 18 contre 198, ou 1 contre 11 : parce que si des 216 hazards qui se rencontrent entre trois Dez, on ôte 18 hazards qui peuvent produire une Rafle, il reste 198, &c.

PROBLEME XIV.

Plusieurs Dez étant jettés, trouver le nombre des points qui en proviennent après quelques opérations.

SI quelqu'un a jetté sur une table, par exemple, trois Dez, que nous appellerons A, B, C, dites-lui d'ajouter tous les points de dessus, & ceux de dessous de deux Dez seulement tels qu'on voudra, comme des deux derniers B, C, puis de mettre à part le troisiéme A, sans en changer l'assiete. Dites-lui ensuite de jetter de nouveau les deux mêmes Dez B, C; d'ajouter à la somme précédente tous les points de dessus, & ceux de dessous de l'un de ces Dez, comme du second C, pour avoir une seconde somme, & de mettre à part le premier B, proche du précédent A, sans en changer l'assiete. Enfin faites-lui jetter le dernier Dé C, & dites-lui d'ajouter à la seconde somme précédente le nombre des points de dessus, pour avoir une troisiéme somme, que vous trouverez en cette sorte. Le troisiéme Dé C, ayant été mis près des deux autres

ſans en changer la ſituation, approchez-vous de la table, comptez tous les points qui ſe trouveront au-deſſus de ces trois Dez, ajoutez à leur ſomme autant de fois 7, qu'il y a de Dez, comme ici trois fois 7, ou 21, (ce nombre 7 étant le nombre des points de deux faces oppoſées d'un Dé, quand il eſt bien fait,) la ſomme ſera celle qu'on cherche.

Suppoſons qu'ayant jetté pour la premiere fois les trois Dez A, B, C, il ſoit venu en deſſus ces trois points 1, 4, 5: Ayant mis, par exemple, le premier 1 à part, faites ajouter à ces trois points 1, 4, 5, les deux 3, 2, qui ſe trouvent au-deſſous des deux autres, dont les points de deſſus ſont 4, 5, pour avoir la premiere ſomme 15. Suppoſons maintenant que les deux mêmes Dez étant jettés il vienne en deſſus ces deux points 3, 6: celui qui a 3 ayant été mis à part près de celui qui avoit 1, faites ajouter ces deux points 3, 6, & encore 1, qui ſe trouve au-deſſous du troiſiéme Dé reſtant, qui a 6 au-deſſus; la ſomme 10 étant ajoutée à 15 premiere ſomme trouvée, on aura cette ſeconde ſomme 25. Suppoſons enfin que ce troiſiéme Dé étant jetté ſeul une troiſiéme fois, il vienne 6 en deſſus, vous ferez mettre ce Dé avec les autres, ſans le changer, & ajouter le 6 à la ſeconde ſomme 25, pour avoir cette troiſiéme ſomme 31: vous devinerez cette derniere ſomme en ajoutant 21 à la ſomme 10 des points 1, 3, 6, qui ſe trouvent au-deſſus des trois Dez reſtans, dont vous vous ſerez approché pour connoître cette ſomme 10 de leurs points 1, 3, 6.

REMARQUES.

Ce Problême peut ſe réſoudre avec plus de trois

Dez, il ne faut qu'obſerver combien de fois on fait ajoûter les points de deux faces oppoſées d'un Dé, & retenir autant de fois 7 pour les ajoûter, après que le dernier Dé aura été jetté, à la ſomme des faces du deſſus de tous les Dez qu'on aura fait mettre à part. Si l'on avoit jetté quatre Dez, par exemple, on trouveroit qu'en faiſant la même choſe qu'on vient de faire, on fait prendre ſix fois les points des deux faces oppoſées d'un Dé, & qu'ainſi il faudroit ajouter 6 fois 7, ou 42 à la ſomme des points des faces de deſſus des Dez, dont on ſe ſeroit approché. De même on trouveroit que pour cinq Dez on auroit fait prendre dix fois les points des deux faces oppoſées d'un Dé, & que par conſéquent il faudroit ajouter 10 fois 7 ou 70 à la ſomme des faces de deſſus des cinq Dez dont on ſe ſeroit approché. Ce ſera la même régle pour tel nombre de Dez qu'on aura choiſi.

Il faut prendre garde que les Dez ſoient marqués, comme on l'a déja dit, en ſorte que les points des deux faces oppoſées étant ajoutés, faſſent 7. La démonſtration de ce Problême n'eſt fondée que ſur cette ſtructure ; car toutes les fois qu'on fait prendre les points des deux faces oppoſées, on eſt aſſuré que leur ſomme eſt 7. Donc puiſqu'avec trois Dez on fait prendre trois fois les points de deux faces oppoſées, c'eſt la même choſe que de faire prendre 21. Par conſéquent ajoutant 21 à tous les autres points qu'on aſſemble, il eſt évident qu'on a la ſomme de tous les points. Il en eſt de même pour tel autre nombre de Dez qu'on aura fait jetter.

PROBLEME XV.

Deux Dez étant jettés, trouver les points de dessus de chaque Dé, sans les voir.

QUelqu'un ayant jetté deux Dez sur une table, faites-lui ajouter 5 au double des points de dessus de l'un de ces deux Dez, puis lui ayant fait multiplier la somme par le même nombre 5, dites-lui d'ajouter au produit le nombre des points de dessus du second Dé. Enfin ayant demandé cette seconde somme, ôtez-en 25 quarré du même nombre 5: le reste sera un nombre composé de deux figures, dont la premiere vers la droite, qui représente les dixaines, sera le nombre des points de dessus du premier Dé, & la seconde vers la gauche qui représente les unités, sera le nombre des points de dessus du second Dé.

Supposons que le nombre des points de dessus du premier Dé soit 2, & que le nombre des points de dessus du second Dé soit 3. Si on double 2, nombre des points de dessus du premier Dé, & qu'au double 4 on ajoute 5, on aura 9, qui étant multiplié par le même nombre 5, donnera 45, auquel ajoutant 3, nombre des points de dessus du second Dé, on aura 48, d'où ôtant 25 quarré du même nombre 5, il reste 23, dont la premiere figure 2, montre le nombre des points de dessus du premier Dé, & l'autre figure 3 fait connoître le nombre des points de dessus du second Dé.

Autrement.

Ou bien demandez à celui, qui a jetté les deux Dez, combien font ensemble les points de dessous,

Digitized by Google

& de combien le nombre des points de deſſous de l'un des Dez ſurpaſſe le nombre des points de deſſous de l'autre Dé; ſi cet excès eſt, par exemple, 1, & que la ſomme de tous les points de deſſous ſoit 9, ajoutez ces deux nombres, 1, 9, & ôtez 10 leur ſomme de 14: la moitié 2 du reſte 4 ſera le nombre des points de deſſus de l'un des deux Dez. Pour avoir le nombre des points de deſſus de l'autre Dé, au lieu d'ajouter l'excès 1 à la ſomme 9, il le faut ôter, & ayant ôté de 14 le reſte 8, on aura ce ſecond reſte 6, dont la moitié 3 ſera le nombre qu'on cherche.

Encore autrement.

Ou bien encore, dites à celui qui a jetté les deux Dez, d'ajouter les points de deſſus, & de vous dire leur ſomme, qui ſera, par exemple, 5. Dites-lui encore de multiplier le nombre des points de deſſus d'un Dé par le nombre des points de deſſous de l'autre Dé, & de vous dire leur produit, que nous ſuppoſerons 6. Par le moyen de ce produit & de la ſomme précédente 5, vous trouverez le nombre des points de deſſus de chaque Dé en cette ſorte. Multipliez la ſomme 5 par elle-même, pour avoir ſon quarré 25, duquel vous ôterez 24 quadruple du produit 6, & il reſte 1, dont vous prendrez la racine quarrée, qui eſt auſſi 1; laquelle étant ajoutée & ôtée de la ſomme précédente 5, donnera ces deux nombres 6, 4, dont les moitiés 3, 2, ſeront les nombres des points de deſſus de chaque Dé.

PROBLEME XVI.

Trois Dez étant jettés, trouver les points de dessus de chaque Dé sans les voir.

QUelqu'un ayant jetté trois Dez sur une table, faites-les ranger en ligne droite l'un près de l'autre. Demandez la somme des points de dessous du premier & du second dé, qui sera, par exemple, 9; celle des points de dessous du second & du troisiéme Dé, que nous supposerons 5; enfin la somme des points de dessous du premier & du troisiéme Dé, qui soit 6. Par le moyen de ces trois sommes ou nombres connus 9, 5, 6, on trouvera le nombre des points de dessus du premier Dé: car en ôtant de 15, somme du premier & du troisiéme nombre, le second 5, & en ôtant de 14 le reste 10, on aura cet autre reste 4, dont la moitié 2 sera le nombre des points dessus du premier Dé. Pour trouver le nombre des points de dessus du second Dé, ôtez de 14 somme des deux premiers nombres 9, 5, le troisiéme; puis ôtez de 14 le reste 8, pour avoir un second reste 6, dont la moitié 3 sera le nombre des points de dessus du second Dé. Enfin pour avoir le nombre des points de dessus du troisiéme Dé, ôtez de 11 somme du second nombre 5, & du troisiéme 6, le premier 9; ensuite ôtez de 14 le reste 2, pour avoir un second reste 12, dont la moitié 6 sera le nombre des points de dessus du troisiéme Dé.

Autrement.

Les trois Dez ayant été jettés, faites doubler le nombre des points de l'un de ces Dez, puis

Digitized by Google

vous ferez ajouter 5 à ce double, multiplier la somme par 5, & ajouter 10 à ce produit. Faites ensuite ajouter à ce total le nombre des points du second Dé, & multiplier cette somme par 10. Enfin ayant ajouté à ce dernier produit le nombre des points du troisiéme Dé, vous demanderez la somme qui sera venue après toutes ces opérations. Vous en ôterez 350, & les trois nombres, qui resteront, marqueront le nombre des points de chaque Dé; en sorte que celui qui sera à la place des centaines, sera le nombre des points du premier Dé; celui qui sera à la place des dixaines, sera le nombre des points du second Dé, & celui qui sera à la place des unités, sera le nombre des points du troisiéme Dé.

Si, par exemple, on amene ces trois nombres 2, 3, 6, le double de 2 est 4, auquel ajoutant 5, il vient 9, qui étant multiplié par 5, donne 45, auquel on ajoutera 10, & l'on aura 55. Ensuite ayant ajouté 3 nombre des points du second Dé à cette somme 55, on aura 58, qui étant multiplié par 10, donnera 580. Enfin on ajoutera 6, nombre des points du troisiéme Dé, à 580, la somme sera 586. Toutes ces opérations auront été faites en secret. Mais lorsque vous sçaurez que le total est 586, vous en ôterez 350, il restera 236. Chacun de ces chifres pris de suite, marque le nombre des points de chaque Dé, 2, 3, 6.

REMARQUES.

On vient de voir que quand on a jetté trois Dez, il falloit ôter 350 de la somme demandée & connue; mais si l'on avoit jetté quatre Dez, il faudroit continuer à faire la même chose pour le qua-

triéme Dé, que ce qu'on a fait pour les trois autres, & ôter de la ſomme demandée 3500. Il en eſt de même pour un plus grand nombre de Dez, il faudra ôter de la ſomme demandée le nombre 350, augmenté d'autant de zeros qu'il y aura de Dez qui ſurpaſſeront les trois qu'on a d'abord jetté. Par exemple, s'il y avoit quatre Dez, dont les points fuſſent 3, 5, 8, 2, ayant fait doubler le 3, point du premier Dé, il viendra 6, auquel faiſant ajouter 5, la ſomme ſera 11, qui multipliée par 5, donne 55: & faiſant ajouter 10 à ce produit, on aura 65. Enſuite on fera ajouter à 65 le 5, point du ſecond Dé, & l'on aura 70, qui multiplié par 10, donnera 700, auquel on fera ajouter le 8, point du troiſiéme Dé, & la ſomme ſera 708: cette ſomme ayant été multipliée par 10, il viendra 7080. On fera ajouter le 2, point du quatriéme Dé à ce produit, on aura 7082. Enfin après avoir connu cette ſomme 7082, on en ôtera 3500, & le reſte 3582 exprimera par ordre les points de chaque Dé 3, 5, 8, 2.

On voit que les points 8, 2 des deux derniers Dez, n'ont point été changés par les opérations; c'eſt pourquoi afin de mieux couvrir l'artifice, il ſeroit à propos de faire ajouter à la ſomme totale 7082 quelque nombre, comme 12, l'on auroit 7094: puis ayant demandé cette derniere ſomme, on en ôteroit 3512, & il reſteroit le même nombre qu'auparavant 3582.

La méthode qu'on vient de propoſer pour deviner les points de pluſieurs Dez jettés, peut très-bien ſervir à deviner pluſieurs nombres penſés. Ainſi on peut l'ajouter à toutes les diverſes manieres qu'on va enſeigner dans les Problêmes ſuivans.

Digitized by Google

PROBLEME XVII.

Deviner le nombre que quelqu'un a pensé.

I.

FAites multiplier par lui-même le nombre pensé ; dites ensuite d'ajouter à ce quarré le double du nombre pensé ; puis faites ajouter l'unité à la somme du quarré & du double : enfin ayant demandé quelle est cette somme, vous en tirerez la racine quarrée, d'où ayant ôté l'unité, il restera le nombre pensé.

Comme si quelqu'un a pensé 6, le quarré de ce nombre est 36, auquel si on ajoute 12 double de 6, on aura 48 : ce nombre augmenté de l'unité, donnera 49. On tirera la racine quarrée de 49, qui est 7, ôtant 1 de 7, on aura 6 pour le nombre pensé.

II.

Ayant fait ôter 1 du nombre pensé, faites doubler le reste : ayant encore fait ôter 1 de ce double, faites ajouter au reste le nombre pensé : enfin ayant demandé le nombre qui vient de cette addition, ajoutez-y 3 ; la troisiéme partie de cette somme sera le nombre pensé.

Comme si l'on a pensé 5, & qu'on en ôte 1, il restera 4, dont le double 8 étant diminué de 1, & le reste 7 étant augmenté du nombre pensé 5, on a cette somme 12, à laquelle ajoutant 3, on a cette autre somme 15, dont la troisiéme partie 5 est le nombre pensé.

III.

Ou bien après avoir fait ôter 1 du nombre pen-

sé, faites tripler le reste, & après avoir aussi fait ôter 1 de ce triple, faites ajouter au reste le nombre pensé : enfin ayant demandé le nombre qui vient de cette addition, vous y ajouterez 4; la quatriéme partie de cette somme sera le nombre pensé.

Comme si l'on a pensé 5, & qu'on en ôte 1, il restera 4, dont le triple 12 étant diminué de 1, & le reste 11 étant augmenté du nombre pensé 5, on a cette somme 16 à laquelle ajoutant 4, on a cette autre somme 20, dont la quatriéme partie 5 est le nombre pensé.

IV.

Ayant fait ajouter 1 au nombre pensé, faites doubler la somme : ayant encore fait ajouter 1 à ce double, faites ajouter à la somme le nombre pensé : enfin demandez le nombre qui vient de cette derniere addition, dont vous ôterez 3, la troisiéme partie du reste sera le nombre pensé.

Comme si l'on a pensé 5, & qu'on y ajoute 1, on aura 6, dont le double 12 étant augmenté de 1, & la somme 13 étant augmentée du nombre pensé 5, on a cette somme 18, de laquelle ôtant 3, il restera 15, dont la troisiéme partie 5 est le nombre pensé.

V.

Ou bien après avoir fait ajouter 1 au nombre pensé, faites tripler la somme après avoir aussi fait ajouter 1 à ce triple, faites ajouter à la somme le nombre pensé : enfin ayant demandé le nombre qui vient de cette derniere addition, vous en ôterez 4; la quatriéme partie du reste sera le nombre pensé.

Comme

Comme si l'on a pensé 5, & qu'on y ajoute 1, on aura 6, dont le triple 18 étant augmenté de 1, & la somme 19 étant augmentée du nombre pensé 5, on a cette somme 24, de laquelle ôtant 4, il restera 20, dont la quatriéme partie 5 est le nombre pensé.

V I.

Ayant fait ôter 1 du nombre pensé, faites doubler le reste : ayant encore fait ôter 1 de ce double, faites ôter du reste le nombre pensé : enfin ayant demandé le nombre qui reste de cette derniere soustraction, vous y ajouterez 3 ; la somme sera le nombre pensé.

Comme si l'on a pensé 5, & qu'on en ôte 1, il restera 4, dont le double 8 étant diminué de 1, & le reste 7 étant encore diminué du nombre pensé 5, il reste 2 : auquel ajoutant 3, la somme 5 est le nombre pensé.

VII.

Ayant fait ajouter 1 au nombre pensé, faites doubler la somme : ayant encore fait ajouter 1 à ce double, faites ôter de la somme le nombre pensé : enfin ayant demandé le nombre qui reste de cette soustraction, vous en ôterez 3 ; le reste sera le nombre pensé,

Comme si l'on a pensé 5, & qu'on y ajoute 1, on aura 6, dont le double 12 étant augmenté de 1, & la somme 13 étant diminuée du nombre pensé 5, il restera 8, dont ôtant 3, le reste 5 est le nombre pensé.

VIII.

Après avoir fait ôter 1 du nombre pensé, faites tripler le reste, & après avoir aussi fait ôter 1 de

e triple, faites ôter du reste le double du nombre pensé : enfin ayant demandé le nombre qui reste de cette derniere soustraction, vous ajouterez 4; la somme sera le nombre pensé.

Comme si l'on a pensé 5, & qu'on en ôte 1, il restera 4, dont le triple 12 étant diminué de 1, & le reste 11 étant encore diminué de 10 double du nombre pensé, il reste 1, auquel ajoutant 4, la somme 5 est le nombre pensé.

IX.

Après avoir fait ajouter 1 au nombre pensé, faites tripler la somme, & après avoir aussi fait ajouter 1 à ce triple, faites ôter de la somme le double du nombre pensé : enfin ayant demandé le nombre qui reste, vous en ôterez 4; le reste sera le nombre pensé.

Comme si l'on a pensé 5, & qu'on y ajoute 1, l'on aura 6, dont le triple 18 étant augmenté de 1, & la somme 19 étant diminuée de 10, double du nombre pensé 5, on a ce reste 9, dont ôtant 4, le reste 5 est le nombre pensé.

X.

Dites à celui, qui aura pensé un nombre, de multiplier ce nombre par 3, & de prendre la moitié de ce triple, au cas qu'il le puisse faire sans reste, s'il ne peut le faire sans reste, vous lui ferez ajouter 1 à ce triple, pour en pouvoir prendre justement la moitié, que vous ferez encore multiplier par 3. Après quoi vous demanderez combien il y a de fois 9 dans ce dernier triple, & vous prendrez autant de fois 2, qu'il y aura de fois 9, pour le nombre qui aura été pensé. Mais vous vous souviendrez d'ajouter 1, si vous l'avez fait ajou-

ter auparavant, lorsque la division par 2 n'aura pû se faire sans reste.

Comme si l'on a pensé 5, son triple est 15, dont on ne peut prendre exactement la moitié; c'est pourquoi on y ajoutera 1, & l'on aura 16, dont la moitié 8 étant multipliée encore par 3, on a ce produit 24, dans lequel 9 est compris 2 fois: donc prenant 2 fois 2, on a ce nombre 4, auquel ajoutant 1, qu'on a fait ajouter auparavant, la somme 5 est le nombre pensé.

Remarquez que le nombre pensé sera 1, lorsque le nombre 9 ne sera point contenu dans le dernier triple.

Pour ôter les 9 autant de fois qu'il se pourra, faites ôter 27 ou 36, ou 72, &c. si ces nombres y sont contenus, puis faites ôter 9 du reste, si cela se peut, & ainsi autant de fois qu'il sera possible. C'est une maniere différente de celle qu'on vient d'enseigner.

XI.

Faites ajouter & ôter 1 du nombre pensé, pour avoir une somme & un reste que vous ferez multiplier ensemble, & demandez le produit qui vient de la multiplication: si vous ajoutez 1 à ce produit, la racine quarrée de la somme sera le nombre pensé.

Comme si l'on a pensé 5, ajoutant 1 à 5, on a la somme 6, & ôtant 1 de 5, on a le reste 4; puis multipliant la somme 6 par le reste 4, on a un produit 24, auquel ajoutant 1, la racine quarrée 5 de la somme 25 est le nombre pensé.

XII.

Ayant fait ajouter 1 au nombre pensé, faites

multiplier la ſomme par lenombre penſé, & faites ôter du produit le même nombre penſé : enfin demandez le nombre qui reſtera de cette ſouſtraction, la racine quarrée de ce reſte ſera le nombre penſé.

Comme ſi l'on a penſé 5, ajoutant 1 à 5, on a 6, qui étant multiplié par le nombre penſé 5, donne 30, d'où ôtant le même nombre penſé 5, il reſte 25, donc la racine quarrée 5, eſt le nombre penſé.

XIII.

Ou bien ayant fait ôter 1 du nombre penſé, faites multiplier le reſte par le nombre penſé ; puis faites ajouter au produit le même nombre penſé : enfin demandez la ſomme qui vient de cette addition ; la racine quarrée de cette ſomme ſera le nombre penſé.

Comme l'on a penſé 5, ôtant 1 de 5, il reſte 4, qui étant multiplié par le nombre penſé 5, donne 20, auquel ajoutant le même nombre penſé 5, on a 25, dont la racine quarrée 5 eſt le nombre penſé.

XIV.

Ayant fait ajouter 2 au nombre penſé, faites ajouter à la ſomme un 0 vers la droite, pour avoir un nombre dix fois plus grand, auquel vous ferez ajouter 12 ; vous ferez encore ajouter à la ſomme un 0 vers la ~~gauche~~ Droite, pour avoir un nombre dix fois plus grand, dont vous ferez ôter 320 : enfin vous demanderez le reſte, dont les figures ſignificatives vers la gauche, en retranchant les deux zero, qui ſe rencontreront toujours à la droite, repréſenteront le nombre penſé.

Comme ſi l'on a penſé 5, en y ajoutant 2, on a 7, auquel ajoutant un 0 vers la droite, on a 70,

Digitized by Google

auquel si l'on ajoute 12, on a 82; puis ajoutant encore un o vers la droite, on a 820, d'où ôtant 320, il reste 500, dont retrachant les deux zeros à la droite, le reste 5 est le nombre pensé.

X V.

Ayant fait ajouter 5 au double du nombre pensé, faites ajouter à la somme un o vers la droite, pour avoir un nombre dix fois plus grand, auquel vous ferez ajouter 20: puis vous ferez encore ajouter à la somme un o vers la droite, pour avoir un nombre dix fois plus grand, dont vous ferez ôter 700: enfin vous demanderez le reste, dont vous retrancherez les] deux zeros, qui se rencontreront toujours à la droite, & la moitié du nombre qui restera vers la gauche, sera le nombre pensé.

Comme si l'on a pensé 5, en ajoutant 5 à son double 10, on a 15, auquel ajoutant un o vers a gauche, on a 150, auquel si l'on ajoute 20, on a 170; puis ajoutant à ce nombre un o vers la droite, on a 1700, d'où ôtant 700, on a 1000, dont retranchant deux zeros à la droite, la moitié 5 du reste 10, est le nombre pensé.

X V I.

Ces deux dernieres méthodes ne sont pas extrêmement subtiles, parce que le dernier nombre étant connu, il est aisé en retrogradant, de connoître lés autres nombres, & par conséquent le nombre pensé. C'est pourquoi il vaudra mieux se servir des deux méthodes suivantes, dont le secret est plus caché.

Ayant fait ajouter 1 au triple du nombre pensé, faites multiplier la somme par 3; puis ayant fait

ajouter à ce triple le nombre pensé, demandez le nombre qui viendra de cette addition ; car si vous ôtez 3 de cette somme, & que du reste vous retranchiez le 0 qui se trouvera à la droite, le reste vers la gauche sera le nombre pensé.

Comme si l'on a pensé 5, ajoutant 1 à son triple 15, on a 16, dont le triple est 48, auquel ajoutant le nombre pensé 5, on a 53, d'où ôtant 3 & retranchant du reste 50 le 0 qui est à la droite, il reste 5 vers la gauche pour le nombre pensé.

XVII.

Ayant fait ôter 1 du triple du nombre pensé ; faites multiplier le reste par 3 ; puis ayant fait ajouter au produit le nombre pensé, demandez le nombre qui vient de cette addition ; car si vous ajoutez 3 à cette somme, & que de cette seconde somme vous retranchiez le 0, qui se trouvera à la droite, le reste vers la gauche sera le nombre pensé.

Comme si l'on a pensé 5, en ôtant 1 de son triple 15, il reste 14, dont le triple est 42, auquel ajoutant le nombre pensé 5, on a 47, auquel ajoutant 3, & retranchant de la somme 50 le 0 qui est à la droite, il reste 5 vers la gauche pour le nombre pensé.

COROLLAIRE.

Il suit de ces deux dernieres méthodes, que, *si on ajoute l'unité au triple d'un nombre quelconque, & qu'on ajoute le même nombre au triple de la somme, on aura une seconde somme qui se terminera par 3.* Comme si on ajoute l'unité au triple 18 du nombre 6, & qu'on ajoute le même nombre 6 au

triple 57 de la somme 19, on a cette seconde somme 63, qui se termine par 3.

Il s'ensuit aussi que *si on ôte l'unité du triple d'un nombre quelconque, & qu'on ajoute le même nombre au triple du reste, on aura une somme qui se terminera par* 7. Comme si on ôte l'unité du triple 18 du nombre 6, & qu'on ajoute le même nombre 6 au triple 51 du reste 17, on a cette somme 57, qui se termine par 7.

Enfin il s'ensuit que ce Problême double est impossible ; *trouver un nombre tel, que si on ajoute l'unité à son triple, ou qu'on ôte l'unité de son triple, & qu'on ajoute le même nombre au triple de la somme ou du reste, la somme soit un quarré parfait*; parce que tout nombre qui finit par 3, ou par 7, ne peut avoir une racine quarrée exacte, comme on a dit au *Probl. VIII. p.* 19. Voyez le Problême suivant.

PROBLEME XVIII.

Trouver le nombre qui reste à quelqu'un après quelques opérations, sans lui rien demander.

AYant fait penser un nombre à volonté, faites ajouter à son double un nombre pair, tel qu'il vous plaira, par exemple, 8 ; puis faites ôter de la moitié de la somme le nombre pensé : ce qui restera sera la moitié du nombre pair que vous aviez fait ajouter auparavant ; sçavoir, 4. Ainsi vous direz hardiment qu'il reste 4 ; ce qui surprendra agréablement ceux qui n'en verront pas d'abord la raison, quoique la démonstration en soit facile.

C'est pourquoi pour sçavoir adroitement le nombre qui aura été pensé, faites semblant d'ignorer le reste 4, & faites-le ôter du nombre pensé, si le

nombre pensé est plus grand, ou faites-en ôter le nombre pensé, si le nombre pensé est plus petit; puis demandez le reste. Si vous ajoutez ce reste à la moitié 4 du nombre 8, que vous aviez fait ajouter au nombre pensé, si le nombre pensé a été trouvé plus grand que cette moitié 4, ou si vous ôtez ce reste de la même moitié 4, si le nombre pensé a été trouvé plus petit que cette moitié 4, vous aurez le nombre pensé.

Comme si l'on a pensé 5, & qu'on ajoute 8 à son double 10, on aura 18, dont la moitié est 9, d'où ôtant le nombre pensé 5, il reste 4, moitié de 8 nombre ajouté, & si l'on ôte cette moitié 4 du nombre pensé 5 qui est plus grand, il restera 1; ce reste étant ajouté à la même moitié 4, parce que le nombre pensé 5 s'est trouvé plns grand que cette moitié 4, on aura la somme 5, qui est le nombre pensé.

De même, si on ajoute 12 au double 10 du nombre pensé 5, on aura 22, dont la moitié est 11, d'où ôtant le nombre pensé 5, il reste 6, moitié du nombre ajouté 12; & si de cette moitié 6 on ôte le nombre pensé 5, qui est le plus petit, il restera 1; ce reste étant ôté de la même moitié 6, parce que le nombre pensé 5 s'est trouvé moindre que cette moitié 6, on aura un autre reste 5, qui est le nombre pensé.

Autrement.

Faites ôter du double du nombre pensé un nombre pair moindre & tel qu'il vous plaira, par exemple, 4: faites encore ôter la moitié du reste du nombre pensé, le reste sera 2, moitié du nombre ôté 4: c'est pourquoi pour trouver le nombre pensé, faites ajouter à cette moitié 2 le nom

bre pensé, & demandez la somme, qui soit, par exemple, 7, dont si vous ôtez la même moitié 2, le reste 5 sera le nombre pensé.

Autrement.

On peut encore trouver plus facilement le nombre que quelqu'un aura pensé, en lui faisant ajouter un nombre à volonté, & en faisant multiplier la somme par le nombre pensé. Ensuite ayant fait ôter du produit le quarré du nombre pensé, demandez le reste, & divisez ce reste par le nombre que vous avez fait ajouter; le quotient sera le nombre pensé.

Comme si l'on a pensé 5, & qu'on y ajoute, par exemple, 4, on aura 9, qui étant multiplié par le nombre pensé 5, on a 45, d'où ôtant le quarré 25 du nombre pensé 5, & le reste 20 étant divisé par le nombre 4, qui a été ajouté auparavant, le quotient donne 5 pour le nombre pensé.

Autrement.

Ou bien faites ôter du nombre pensé un nombre plus petit, tel qu'il vous plaira: faites multiplier le reste par le nombre pensé: faites ôter ce produit du quarré du nombre pensé, demandez le reste, & divisez ce reste par le nombre que vous avez fait ôter du nombre pensé, le quotient sera le nombre pensé.

Comme si l'on a pensé 5, & qu'on en ôte, par exemple, 3, il restera 2, qui étant multiplié par le nombre pensé 5, produit 10. Ce nombre 10 étant ôté de 25, quarré du nombre pensé 5, il reste 15, qui étant divisé par le nombre 3, qui a été ôté du nombre pensé, donne pour quotient 5, qui est le nombre pensé.

Autrement.

La maniere la plus facile de toutes pour deviner le nombre que quelqu'un aura pensé, est la suivante. Faites ôter du nombre pensé un nombre plus petit, tel qu'il vous plaira, & mettre le reste à part. Faites ajouter le même nombre au nombre pensé, & ajouter à la somme le reste précédent, pour avoir une seconde somme, que vous demanderez; la moitié de cette somme sera le nombre pensé.

Comme si l'on a pensé 5, & qu'on en ôte, par exemple, 3, il restera 2; si l'on ajoute le même nombre 3 au nombre pensé 5, on aura 8, auquel ajoutant le précédent reste 2, on a 10, dont la moitié 5 est le nombre pensé.

PROBLEME XIX.

Trouver le nombre que quelqu'un aura pensé, sans lui rien demander.

FAites ajouter au nombre pensé sa moitié, s'il est pair, ou sa plus grande moitié, s'il est impair, pour avoir une premiere somme. Faites aussi ajouter à cette somme sa moitié, ou sa plus grande moitié, selon qu'elle sera un nombre pair ou impair, pour avoir une seconde somme, dont vous ferez ôter le double du nombre pensé; ensuite faites prendre la moitié du reste, ou sa plus petite moitié, au cas que ce reste soit un nombre impair, continuez à faire prendre la moitié de la moitié, jusqu'à ce qu'on vienne à l'unité. Cela étant fait remarquez combien de soudivisions on aura faites, & pour la premiere division retenez 2, pour la se-

conde 4, pour la troiſiéme 8, & ainſi des autres en proportion double. Obſervez qu'il faut ajouter 1 pour chaque fois que vous aurez pris la plus petite moitié, parce qu'en prenant cette plus petite moitié, il reſte toujours 1, & qu'il faut ſeulement retenir 1, lorſqu'on n'aura pû faire aucune ſoudiviſion ; car ainſi vous aurez le nombre dont on a pris les moitiés des moitiés, & alors le quadruple de ce nombre ſera le nombre penſé, au cas qu'il n'ait point fallu prendre au commencement la plus grande moitié, ce qui arrivera ſeulement lorſque le nombre penſé ſera pairement pair, ou diviſible par 4 ; autrement on ôtera 3 de ce quadruple ſi à la premiere diviſion l'on a pris la plus grande moitié, ou bien ſeulement 2, ſi à la ſeconde diviſion l'on a pris la plus grande moitié, ou bien enfin 5, ſi à chacune des deux diviſions on a pris la plus grande moitié, & alors le reſte ſera le nombre penſé.

Comme ſi l'on a penſé 4, en lui ajoutant ſa moitié 2, on a 6, auquel ſi l'on ajoûte pareillement ſa moitié 3, on a 9, d'où ôtant le double 8 du nombre penſé 4, il reſte 1, dont on ne ſçauroit prendre la moitié, parce qu'on eſt parvenu à l'unité ; c'eſt pourquoi on retiendra 1, dont le quadruple 4 eſt le nombre penſé.

Si l'on a penſé 5, en lui ajoutant ſa plus grande moitié 3, on a 8, auquel ſi on ajoute ſa moitié 4, on a 12, d'où ôtant le double 10 du nombre penſé 5, il reſte 2, dont la moitié eſt 1 : & comme l'on ne ſçauroit plus prendre la moitié, parce qu'on eſt parvenu à l'unité, on retiendra 2, parce qu'il y a une ſoudiviſion. Si de 8 quadruple de ce nombre retenu 2, on ôte 3, parce que dans la premiere diviſion on a pris la plus grande moitié, le reſte 5 eſt le nombre penſé.

Si le nombre pensé est 6, en lui ajoutant sa moitié 3, on a 9, auquel si l'on ajoute sa plus grande moitié 5, on a 14, d'où ôtant le double 12 du nombre pensé 6, il reste 2, dont la moitié est 1: comme l'on ne sçauroit plus prendre la moitié, parce qu'on est parvenu à l'unité, on retiendra 2, parce qu'il y a une soudivision. Si de 8, quadruple de ce nombre retenu 2, on ôte 2, parce que dans la seconde division l'on a pris la plus grande moitié, le reste 6 est le nombre pensé.

Si l'on a pensé 7, en lui ajoutant sa plus grande moitié 4, on a 11, auquel si l'on ajoute pareillement sa plus grande moitié 6, on a 17, d'où ôtant le double 14 du nombre pensé 7, il reste 3, dont la plus petite moitié est 1, & comme l'on ne sçauroit plus prendre la moitié, parce qu'on est parvenu à l'unité on retiendra 2, auquel on ajoutera 1, parce qu'on a pris la plus petite moitié; ainsi on aura 3, dont le quadruple est 12, duquel ôtant 5, parce que dans la premiere & dans la seconde division l'on a pris la plus grande moitié, le reste 7 est le nombre pensé. Ainsi des autres.

PROBLEME XX.

Deviner deux nombres que quelqu'un aura pensé.

I.

Ayant fait ajouter ensemble les deux nombres pensés, pour avoir leur somme, & ayant fait ôter le plus petit du plus grand, pour avoir leur différence, faites multiplier la somme par la différence, & ajouter au produit le quarré du plus petit nombre pensé. Alors demandez le nombre qui vient de cette addition, & prenez-en la racine

quarrée qui ſera le plus grand des deux nombres penſés. Pour avoir le plus petit, au lieu de faire ajouter au produit le quarré du plus petit nombre penſé, faites ôter ce produit du quarré du plus grand nombre penſé, & demandez le nombre qui reſtera : la racine quarrée de ce reſte ſera le plus petit nombre penſé.

Comme ſi l'on a penſé 3 & 5, en multipliant leur ſomme 8, par leur différence 2, on a le produit 16, auquel ajoutant le quarré 9 du plus petit nombre penſé 3, on a 25, dont la racine quarrée 5 eſt le plus grand des deux nombres penſés : & ôtant le même produit 16 de 25 quarré du plus grand nombre penſé 5, il reſte 9, dont la racine quarrée 3 eſt le plus petit nombre penſé.

II.

Faites ajouter à la ſomme des deux nombres penſés leur différence, & demandez le nombre qui vient de cette addition ; la moitié de ce nombre ſera le plus grand des deux nombres penſés. Pour avoir le plus petit, faites ôter la différence des deux nombres penſés de leur ſomme, & demandez le nombre qui reſtera ; la moitié de ce reſte ſera le plus petit nombre penſé.

Comme dans cet exemple, en ajoutant la différence 2 des deux nombres penſés à leur ſomme 8, on a 10, dont la moitié 5 eſt le plus grand des deux nombres penſés ; & en ôtant la différence 2 de la ſomme 8, il reſte 6, dont la moitié 3 eſt le plus petit nombre penſé.

III.

Faites multiplier la ſomme de deux nombres penſés par elle-même, pour avoir ſon quarré ; puis ayant fait ajouter au plus petit des deux nombre penſés le double du plus grand, & ayant fait

multiplier la ſomme par le plus petit, faites ôter le produit du précédent quarré, & demandez le reſte; la racine quarrée de ce reſte ſera le plus grand des deux nombres penſés. Pour avoir le plus petit, ayant fait ajouter au plus grand le double du plus petit, & ayant fait multiplier la ſomme par le plus grand, faites ôter le produit du précédent quarré, & demandez le reſte dont la racine quarrée ſera le plus petit nombre penſé.

Comme dans cet exemple, où l'on a ſuppoſé que les deux nombres penſés ſont 3 & 5, leur ſomme eſt 8, qui étant multipliée par ſoi-même, donne 64 pour ſon quarré. En ajoutant au plus petit nombre penſé 3 le double 10 du plus grand 5, on a 13, qui étant multiplié par le plus petit 3, donne 39; ce produit 39 étant ôté du précédent quarré 64, il reſte 25, dont la racine quarrée 5 eſt le plus grand des deux nombres penſés. En ajoutant au plus grand nombre penſé 5 le double 6 du plus petit 3, on a 11, qui étant multiplié par le plus grand 5 produit 55; ce produit 55 étant ôté du précédent quarré 64, il reſte 9, dont la racine quarrée 3 eſt le plus petit nombre penſé.

IV.

Faites multiplier enſemble les deux nombres penſés, pour avoir leur produit. Faites auſſi multiplier la ſomme des deux mêmes nombres par celui que vous voulez trouver, & faites ôter de ce produit le produit des deux nombres : après quoi vous demanderez le reſte, dont la racine quarrée ſera le nombre que vous cherchez.

Comme dans cet exemple, ſi l'on multiplie enſemble les deux nombres penſés 3, 5, on aura

leur produit 15 : & si l'on multiplie leur somme 8 par le plus grand nombre 5, si vous le voulez trouver, on a ce produit 40, d'où ôtant le précédent produit 15, il reste 25, dont la racine quarrée 5, est le nombre qu'on cherche.

V.

Après avoir fait multiplier ensemble les deux nombres pensés, pour avoir leur produit, faites multiplier leur différence par le nombre que vous cherchez, & faites ajouter à ce produit le produit des deux nombres, si vous demandez le plus grand nombre, ou bien faites ôter ce produit du produit des deux nombres, si vous demandez le plus petit: alors si vous demandez le nombre qui vient de cette addition, ou de cette soustraction, & que vous en preniez la racine quarrée, vous aurez le nombre que vous cherchez.

Comme dans cet exemple, après avoir multiplié ensemble les deux nombres pensés 3, 5, pour avoir leur produit 15, si l'on fait multiplier leur différence 2 par le plus grand nombre 5, & qu'on ajoute le produit 10 au premier produit 15, on aura 25, dont la racine quarrée 5 est le plus grand nombre. De même, si l'on multiplie leur différence 2 par le plus petit nombre 3, & qu'on ôte le produit 6 du premier 15, il restera 9, dont la racine quarrée 3 est le plus petit nombre pensé.

VI.

Lorsque le plus petit des deux nombres pensés ne passera pas 9, on les pourra deviner très-facilement en cette sorte. Ayant fait ajouter 1 au tri-

ple du plus grand des deux nombres pensés, faites encore ajouter au triple de cette somme les deux nombres pensés, & demandez le nombre qui vient de cette addition ; si vous en ôtez 3, la premiere figure du reste vers la droite sera le plus petit nombre pensé, & ce qui restera vers la gauche, sera le plus grand.

Comme dans l'exemple qui vient d'être proposé, où les deux nombres sont 3, 5, ajoutant à 15, triple du plus grand 5, on a 16, & ajoutant à 48 triple de cette somme 16 les deux nombres pensés 3, 5, ou 8, on a 56, d'où ôtant 3, il reste 53, dont la premiere figure 3 vers la droite est le plus petit nombre pensé, & l'autre figure 5, qui reste vers la gauche, est le plus grand.

PROBLEME XXI.

Deviner plusieurs nombres que quelqu'un aura pensé.

I.

SI la multitude des nombres pensés est impaire, demandez les sommes du premier & du second, du second & du troisiéme, du troisiéme & du quatriéme, & ainsi de suite jusqu'à la somme du premier & du dernier. Ayant écrit toutes ces sommes par ordre, en sorte que la somme du premier & du dernier soit la derniere, ôtez toutes les sommes qui seront dans les lieux pairs de toutes celles qui seront dans les lieux impairs, & la moitié du reste sera le premier nombre pensé, lequel étant ôté de la premiere somme, il restera le second nombre pensé, lequel étant pareillement ôté de la seconde somme, le reste sera le troisiéme nombre pensé, & ainsi de suite.

Comme

Comme si l'on a pensé ces cinq nombres, 2, 4, 5, 7, 8, les sommes du premier & du second, du second & du troisiéme, & ainsi des autres jusqu'à la somme du premier & du cinquiéme sont 6, 9, 12, 15, 10: ôtant 24, somme des deux 9, 15, qui sont dans les lieux pairs de la somme 28 des trois 6, 12, 10, qui sont dans les lieux impairs, il reste 4, dont la moitié 2 est le premier nombre pensé, lequel étant ôté de la premiere somme 6, le reste 4 est le second nombre pensé, lequel étant pareillement ôté de la seconde somme 9, il reste 5 pour le troisiéme nombre pensé, &c.

I I.

Si la multitude des nombres pensés est paire, demandez les sommes du premier & du second, du second & du troisiéme, du troisiéme & du quatriéme, & ainsi de suite jusqu'à la somme du second & du dernier. Ayant écrit toutes ces sommes par ordre, en sorte que la somme du second & du dernier soit la derniere, ôtez de toutes les sommes qui seront dans les lieux pairs toutes celles qui seront dans les lieux impairs, excepté la premiere : la moitié du reste sera le second nombre pensé, par le moyen duquel il sera facile de trouver les autres ; car si on l'ôte de la premiere somme, il restera le premier nombre pensé ; & si on l'ôte de la seconde somme, le reste sera le troisiéme nombre pensé, lequel étant pareillement ôté de la troisiéme somme, on aura pour reste le quatriéme nombre pensé, & ainsi de suite.

Comme si l'on a pensé ces six nombres, 2, 4, 5, 7, 8, 9, les sommes du premier & du second, du second & du troisiéme, du troisiéme & du quatriéme, ainsi de suite jusqu'à la somme du second

& du sixiéme, seront 6, 9, 12, 15, 17, 13: ôtant 29 somme de la troisiéme 12, & de la cinquiéme 17, qui sont dans les lieux impairs, en omettant la premiere, de 37 somme des trois 9, 15, 13, qui sont dans les lieux pairs, il reste 8, dont la moitié 4 est le second nombre pensé, lequel étant ôté de la premiere somme 6, le reste 2 est le premier nombre pensé; & étant ôté de la seconde somme 9, le reste 5 est le troisiéme nombre pensé, lequel étant pareillement ôté de la troisiéme somme 12, il reste 7 pour le quatriéme nombre pensé, & ainsi de suite.

III.

Lorsque chacun des nombres pensés ne sera composé que d'une figure, on les pourra trouver très-facilement en cette sorte. Ayant fait ajouter 1 au double du premier nombre pensé, faites multiplier le tout par 5; & ajouter au produit le second nombre pensé. S'il y a un troisiéme nombre, ayant fait pareillement ajouter 1 au double de la somme précédente, faites multiplier le tout par 5, & ajouter au produit le quatriéme nombre pensé. De même, s'il y a un troisiéme nombre, ayant fait aussi ajouter 1 au double de la derniere somme précédente, faites multiplier le tout par 5, & ajouter au produit le quatriéme nombre pensé, & ainsi de suite, s'il y a davantage de nombres pensés. Après cela demandez le nombre qui vient de l'addition du dernier nombre pensé, & ôtez-en 5 pour deux nombres pensés, 55 pour trois nombres pensés, 555 pour quatre nombres pensés, & ainsi de suite: alors la premiere figure du reste vers la gauche sera le premier nombre pensé, la suivante en allant vers la droite sera le second nom-

Digitized by Google

bre pensé, & ainsi de suite jusqu'à la derniere figure vers la droite qui représentera le dernier nombre pensé.

Comme si l'on a pensé ces quatre nombres 3, 4, 6, 9, en ajoutant 1 au double 6 du premier nombre pensé 3, & en multipliant la somme 7 par 5, on a 35, auquel ajoutant le second nombre pensé 4, on a 39, dont le double est 78; auquel ajoutant 1, & multipliant la somme 79 par 5, on a 395, auquel ajoutant le troisiéme nombre pensé 6, on a 401, dont le double est 802, auquel ajoutant 1, & multipliant la somme 803 par 5, il vient 4015, auquel ajoutant le quatriéme nombre pensé 9, & ôtant de la somme 4024 ce nombre 555, il reste 3469, dont les quatre figures sont les quatre nombres pensés.

IV.

On peut encore résoudre très-facilement le Cas précédent par cette méthode. Ayant fait ôter 1 du double du premier nombre pensé, & ayant fait multiplier le reste par 5, faites ajouter au produit le second nombre pensé, & demandez la somme, s'il n'y a plus de nombres pensés, autrement faites ajouter 5 à cette somme, pour avoir une seconde somme; & ayant fait pareillement ôter 1 du double de cette seconde somme, faites aussi multiplier le reste par 5, & faites ajouter au produit le troisiéme nombre pensé, & demandez la somme, s'il n'y a plus de nombres pensés; autrement il faudra, comme auparavant, faire ajouter 5 à cette somme, pour avoir une autre somme; & ayant fait de la même façon ôter 1 du double de cette autre somme, faites encore multiplier le reste par 5, & faites ajouter au produit le qua-

triéme nombre penſé, & ſi ce quatriéme nombre eſt le dernier, demandez la ſomme, à laquelle ſi vous ajoutez 5, vous aurez une derniere ſomme, dont les figures repréſenteront comme auparavant les nombres penſés.

Comme dans la ſuppoſition que nous venons de faire de ces quatre nombres penſés 3, 4, 6, 9, en ôtant 1 du double 6 du premier nombre penſé 3, & multipliant le reſte 5 par 5, on a 25, auquel ajoutant le ſecond nombre penſé 4, on a cette ſomme 29, à laquelle ſi l'on ajoute 5, on a cette ſeconde ſomme 34, dont le double eſt 68, d'où ôtant 1, il reſte 67, qui étant multiplié par 5, donne 335, auquel ajoutant le troiſiéme nombre penſé 6, on a cette ſomme 341, à laquelle ajoutant 5, on a cette autre ſomme 346, dont le double 692 étant diminué de 1, & le reſte 691 étant multiplié par 5, on a 3455, auquel ajoutant le quatriéme nombre penſé 9, on a cette ſomme 3464, à laquelle ajoutant 5, on a cette derniere ſomme 3469, dont les quatre figures repréſentent les quatre nombres penſés.

PROBLEME XXII.

Une perſonne tenant dans une main un certain nombre pair de piſtoles, & un nombre impair en l'autre main, deviner en quelle main eſt le nombre pair.

FAites multiplier le nombre de la main droite par un nombre pair tel qu'il vous plaira, comme par 2, & le nombre de la main gauche par un nombre impair, auſſi tel qu'il vous plaira, comme par 3; puis ayant fait ajouter enſemble les deux produits, faites prendre la moitié de leur ſomme.

Si cette moitié eſt juſte, en ſorte que la ſomme ſoit un nombre pair, vous connoîtrez que le nombre de la main droite, qui a été multiplié par un nombre pair, eſt impair, & par conſéquent que celui de la main gauche qui a été multiplié par un nombre impair, eſt pair. Il arrivera tout le contraire, lorſque la moitié de la ſomme ne ſera pas juſte, c'eſt-à-dire, quand cette ſomme ſera un nombre impair; car dans ce cas le nombre de la main droite, qui a été multiplié par un nombre pair, ſera pair, & celui de la main gauche, qui a été multiplié par un nombre impair, ſera auſſi impair.

Comme ſi dans la main droite il y a 9 piſtoles, & 8 en la gauche, en multipliant le nombre 9 de la droite par 2, & le nombre 8 de la gauche par 3, & ajoutant enſemble les deux produits 18, 24, on aura la ſomme 42, qui étant un nombre pair, fait connoître que le nombre impair 9, qui a été multiplié par le nombre pair 2, eſt en la main droite, & par conſéquent le nombre pair 8 dans la gauche.

Mais ſi dans la main droite il y a 10 piſtoles, & 7 en la gauche, en multipliant le nombre 10 de la droite par 2, & le nombre 7 de la gauche par 3, & en ajoutant enſemble les deux produits 20, 21, on aura leur ſomme 41, laquelle étant un nombre impair, fait connoître que le nombre pair 10, qui a été multiplié par le nombre pair 2, eſt en la main droite, & par conſéquent le nombre impair 7 dans la main gauche. C'eſt par le moyen de ce Problême qu'on peut réſoudre la Queſtion ſuivante.

REMARQUE.

On voit bien qu'au lieu des deux mains de la même personne, on peut supposer que deux personnes auront pris l'un le nombre pair des pistoles, & l'autre le nombre impair. On fera à l'égard de ces deux personnes ce qu'on a fait à l'égard des deux mains.

QUESTION.

Une personne tenant une piece d'or dans une main, & une piece d'argent en l'autre, trouver en quelle main est la piece d'or, & en quelle main est la piece d'argent.

APrès avoir dit qu'on donne sécretement à l'or une certaine valeur, qui soit un nombre pair, comme 8, & à l'argent une certaine valeur qui soit un nombre impair, comme 5, faites multiplier le nombre de la main droite par un nombre pair quelconque, comme par 2, & le nombre de la main gauche par un nombre impair quelconque, comme par 3. Puis ayant fait ajouter ensemble les deux produits, demandez si leur somme est un nombre pair ou impair. Vous sçaurez que le nombre est pair, en demandant si on peut prendre la moitié, & qu'il est impair, si on vous répond qu'on n'en peut pas prendre la moitié. Si cette somme est un nombre impair, l'or sera dans la main droite, & l'argent dans la gauche, & tout au contraire, si elle est un nombre pair, l'or sera dans la main gauche, & l'argent en la droite.

Digitized by Google

PROBLEME XXIII.

Trouver deux nombres, dont on connoît la Raiſon & la Difference.

I.

POur trouver deux nombres, dont le premier ſoit au ſecond, par exemple, comme 5 eſt à 2, & dont la différence, ou l'excès du plus grand ſur le plus petit, ſoit, par exemple, 12; multipliez cette différence 12 par le plus petit terme 2 de la Raiſon donnée, & diviſez le produit 24 par la Différence 3 des deux termes 5, 2, de la même Raiſon donnée; le quotient 8 ſera le plus petit des deux nombres qu'on cherche, auquel ajoutant la Différence donnée 12, la ſomme 20 ſera le plus grand.

II.

Ou bien multipliez la Différence donnée 12 par 5 le plus grand nombre de la Raiſon donnée, & diviſez le produit 60 par la Différence 3 des deux termes, 5, 2, de la même Raiſon donnée; le quotient 20 ſera le plus grand des deux nombres qu'on cherche, duquel ôtant la différence donnée 12, le reſte 8 ſera le plus petit, comme auparavant.

III.

Ou bien encore multipliez chacun des deux termes 5, 2, de la Raiſon donnée, par la Différence donnée 12, & diviſez chacun des deux produits 60, 24, par la Différence 3 des deux mêmes termes 5, 2; les quotiens 20, 8, ſeront les deux nombres qu'on cherche, comme auparavant. Par

le moyen de ce Problême, l'on peut aisément résoudre la Question suivante.

QUESTION.

Quelqu'un ayant dans une main autant de pieces de monnoye que dans l'autre, deviner combien il y en a en chaque main.

FAites mettre quelques pieces de la main gauche dans la main droite, par exemple, deux, en sorte qu'il y ait quatre piéces plus dans la main droite que dans la gauche; & demandez la Raison du nombre des pieces de la main droite au nombre des pieces de la main gauche, qui soit, par exemple, égale à celle de 5 à 3. Alors il faudra multiplier la Différence 4 du nombre des piéces d'une main au nombre des pieces de l'autre, par le plus petit terme 3 de la Raison donnée, & diviser le produit 12 par la Différence 2 des deux termes 5, 3, de la même Raison donnée, & le quotient 6 sera le nombre des pieces de la main gauche, auquel ajoutant la Différence 4 des deux nombres des pieces qui sont en chaque main, on aura 10 pour le nombre des pieces de la main droite, auquel si l'on ajoute le nombre 6 des pieces de la main gauche, on aura 16 pieces en tout, dont la moitié 8 fait connoître qu'au commencement il y avoit 8 pieces de monnoye dans chaque main.

Digitized by Google

PROBLEME XXIV.

QUESTION I.

Une perſonne ayant pris autant de jettons, ou pieces de monnoye dans une main que dans l'autre, deviner combien il y en a en tout.

DItes-lui de tranſporter de la main droite (par exemple) dans la gauche, un certain nombre de jettons, qui ſoit au-deſſous de celui qu'il a dans l'une des mains. Dites-lui encore que de la main gauche, où il a mis ce nombre de jettons, il en tranſporte dans la droite autant qu'il y en étoit reſté. Le nombre des jettons, qui ſera dans la main gauche, ſera double du nombre qu'on a ordonné d'y tranſporter. Si vous demandez donc de combien les jettons, qui ſont dans la main gauche, ſurpaſſent ceux qui ſont dans la droite, vous connoîtrez combien il y a de jettons dans cette main droite, ainſi il n'y aura plus qu'à ajouter les jettons qui ſont dans les deux mains, pour ſçavoir combien il y en a en tout.

Si on avoit pris dans chaque main 12 jettons, & que vous en euſſiez fait tranſporter 7 de la main droite dans la gauche, il faudroit faire paſſer de la main gauche dans la droite autant qu'il en étoit reſté dans cette main droite, c'eſt-à-dire, cinq jettons. Vous ſeriez aſſuré pour lors qu'il y auroit dans la main gauche 14 jettons qui eſt le double de 7, que vous aviez ordonné d'y tranſporter. Alors vous demanderez de combien le nombre des jettons de la main gauche eſt plus grand que celui de la main droite, on vous répondra qu'il y en a quatre de plus dans celle-ci que dans l'autre: ayant

donc ôté 4 de 14, il restera 10 que vous ajouterez à 14. La somme 24 est le total des jettons qu'on avoit pris.

I. REMARQUE.

Au lieu de demander de combien le nombre des jettons de la main gauche est plus grand que celui de la main droite ; on peut demander de combien le nombre des jettons de la main gauche surpasse celui qu'on avoit pris au commencement, qu'on suppose être 12, ou de combien le nombre des jettons de la main droite est plus petit que celui qu'on avoit pris au commencement. Par ce moyen on connoîtroit que le nombre des jettons de la main droite étoit 10, qu'il faudroit ajouter à 14 pour avoir la somme 24.

II. REMARQUE.

On a donné dans le Problême XVII. plusieurs manieres de deviner un nombre que quelqu'un aura pensé, en voici encore une autre qu'on peut proposer sous ce titre : *Deviner combien une personne aura de jettons ou de pieces de Monnoye dans la main.*

Faites multiplier le nombre de jettons par 3 ; ce triple sera pair ou impair.

I.

Si ce triple est pair, il en faudra faire prendre la moitié, & faire encore multiplier cette moitié par 3 : ce second triple sera pair ou impair.

II.

Si ce second triple est pair, il en faut faire

prendre la moitié, puis demandez combien cette moitié contient de fois 9. Sçachant combien cette moitié contient de fois 9, vous prendrez autant de fois 4 qu'il y a de fois 9, sans vous embarrasser s'il y a du surplus ; le produit sera le nombre des jettons qu'on tiendra dans la main.

Exemple où le premier & le second Triple sont pairs.

Si on a pensé 8, ou qu'on ait pris 8 jettons, il faut faire multiplier 8 par 3, le produit est 24, qui est pair : faites prendre la moitié de 24, qui est 12, que vous ferez encore multiplier par 3. Ce second triple est 36, qui est aussi pair, sa moitié est 18. Demandez combien cette moitié 18, que vous ne sçavez point, contient de fois 9 ; on vous répondra qu'elle contient 2 fois 9 : prenez donc 2 fois 4, & vous aurez 8 pour le nombre des jettons.

III.

Si le second triple est impair, il y faut faire ajouter 1, & retenir 2 en vous-même ; vous ferez prendre ensuite la moitié de ce triple augmenté de l'unité, vous demanderez combien cette moitié contient de fois 9 ; vous prendrez autant de fois 4 qu'elle contiendra de fois 9, sans vous embarasser s'il y a du surplus. Mais vous vous souviendrez d'y ajouter le 2 que vous avez retenu, à cause du second triple impair ; la somme sera le nombre pensé ou pris.

Exemple où le premier triple est pair, & le second est impair.

Si on a pris 6 Jettons, vous ferez multiplier 6

par 3, le produit 18 eſt pair, dont la moitié eſt 9 : vous ferez auſſi multiplier cette moitié 9 par 3, le produit eſt 27, auquel vous ferez ajouter 1, & l'on aura 28 ; mais vous retiendrez deux en vous-même. La moitié de 28 eſt 14, qui ne contient qu'une fois 9 : ainſi ayant ſçû que cette moitié, qui vous eſt inconnue, contient une fois 9, vous prendrez une fois 4, & vous y ajouterez 2, que vous avez retenu, à cauſe du ſecond triple impair, la ſomme 6 eſt le nombre des jettons qu'on a pris.

IV.

Si le premier triple eſt impair, vous y ferez ajouter 1, & retiendrez 1 en vous-même, pour l'ajouter à la fin, comme on le dira. Vous ferez prendre enſuite la moitié de ce triple augmenté de l'unité, & vous ferez encore tripler cette ſomme. Ce ſecond triple ſera pair ou impair.

V.

Si ce ſecond triple eſt pair, vous en ferez prendre la moitié, & vous demanderez combien elle contient de fois 9 : puis vous prendrez autant de fois 4, qu'elle contiendra de 9, & vous augmenterez ce produit de l'unité, que vous avez retenu, à cauſe du premier triple impair, la ſomme ſera le nombre penſé, ou pris.

Exemple où le premier triple eſt impair, & le ſecond eſt pair.

Si on a pris 5 jettons, vous ferez prendre le triple de 5 qui eſt 15 ; auquel vous ferez ajouter 1, parce qu'il eſt impair, la ſomme ſera 16, dont la moitié eſt 8 : vous ferez multiplier cette moitié 8 par 3, le produit eſt 24, dont la moitié eſt 12,

Digitized by Google

qui ne contient qu'une fois 9 ; ce que vous connoîtrez après l'avoir demandé. Ainsi vous prendrez une fois 4, auquel vous ajouterez 1, à cause du premier triple impair, & vous aurez 5, qui est le nombre pris.

VI.

Mais si le second triple est impair, vous y ferez ajouter 1 ; vous ferez prendre ensuite la moitié de ce triple augmenté de l'unité, & vous retiendrez 2 en vous-même. Vous demanderez combien cette moitié contient de fois 9, vous prendrez autant de fois 4 qu'elle contiendra de fois 9, & vous y ajouterez 3, à cause de 1 retenu en premier lieu pour le premier triple impair, & de 2 retenu en second lieu pour le second triple impair : la somme sera le nombre pris.

Exemple où les deux triples sont impairs.

Si on a pris 7 Jettons, vous ferez multiplier 7 par 3, le triple sera 21, que vous ferez augmenter de l'unité, à cause qu'il est impair, on aura 22, & vous retiendrez 1 en vous-même. Faites ensuite prendre la moitié de 22, qui est 11, que vous ferez encore multiplier par 3, & l'on aura 33, qui est encore impair : ainsi vous retiendrez 2 en vous-même, à cause de ce second triple impair, vous ferez augmenter 33 de l'unité, & l'on aura 34, dont la moitié est 17, qui ne contient qu'une fois 9. Ayant donc sçû que cette moitié contient une fois 9 ; vous prendrez une fois 4, auquel vous ajouterez 3, somme de 1 retenu pour le premier triple, & de 2 retenu pour le second triple : la somme 7 est le nombre des jettons.

VII.

Observez qu'en suivant cette méthode, 1°. Si l'on a pensé 3, ou qu'on ait pris 3 jettons; vous ne trouverez que 1 retenu, à cause du premier triple impair, & 2 retenu à cause du second triple impair, dont la somme est 3 : c'est-à-dire, que si on a pris 3 jettons, les deux triples 9, 15, seront impairs, & que 8 moitié du second triple, ne contenant point 9, il suffit d'ajouter 1 retenu, à cause du premier triple impair, & 2 retenu, à cause du second triple impair; cette somme 3 sera le nombre cherché.

2°. Si l'on a pris deux jettons, le premier triple 6 sera pair, & le second 9 sera impair; ainsi la moitié 5 du second triple, ne contenant point 9, vous ne ferez attention qu'au 2 retenu, à cause du second triple impair, qui sera par conséquent le nombre des jettons qu'on aura pris.

3°. Si l'on n'a pris qu'un jetton, le premier triple 3 sera impair, & le second 6 sera pair; ainsi vous ne ferez attention qu'à 1 retenu, à cause du premier triple impair, qui sera le nombre pris.

4°. Si l'on n'a point pris de jettons, il n'y a point de triple, & par conséquent rien à retenir; il n'y a pas non plus de 9; on trouvera donc qu'on a pris 0, c'est-à-dire, rien.

VIII.

Au lieu de faire prendre la moitié du second triple, vous pouvez demander combien ce second triple contient de fois 9 : alors vous prendrez autant de fois 2, qu'on vous aura dit qu'il y a de fois 9 : & vous aurez soin d'ajouter 1 à ce produit, si le premier triple étant impair, vous avez fait ajouter 1.

Digitized by Google

Exemple.

Si on a pensé 11, ou qu'on ait pris 11 jettons, faites multiplier 11 par trois, il viendra 33 ; ayant fait ajouter 1 à 33 pour avoir 34, vous retiendrez 1 en vous-même, puis vous ferez prendre la moitié de 34, qui est 17. Vous direz encore de multiplier ce 17 par 3, le produit sera 51. Enfin ayant sçû que 9 est 5 fois dans 51, vous prendrez 2 fois 5 qui font 10, auquel vous ajouterez 1, à cause du premier triple impair, & la somme 11 sera le nombre pensé, ou celui des jettons qu'on a pris.

IX.

Cette maniere de deviner un nombre pensé proposé dans ce dernier Article VIII. est la même que celle qui a été proposée au *Probl. XVII. art.* X. Lorsque le premier triple sera pair, on n'ajoutera rien à 2 pris autant de fois que le second triple contiendra de fois 9.

QUESTION II.

Une personne charitable sortant de sa maison, rencontre à sa porte un certain nombre de pauvres. Il veut leur distribuer l'argent qu'il a sur lui : donnant à chacun de ces pauvres neuf sols, il trouve qu'il lui manque trente-deux sols ; mais leur distribuant à chacun sept sols, il lui reste vingt-quatre sols. On demande combien il y avoit de pauvres, & combien cette personne avoit d'argent dans sa bourse.

IL faut ajouter 24 & 32, la somme sera 56, dont la moitié 28 est le nombre des pauvres.

Si l'on multiplie 28, nombre des pauvres, par 7, nombre des sols qu'on leur a donné, & qu'au produit 196 on ajoute les 24 sols de surplus, on aura 220 sols pour l'argent de la personne charitable.

REMARQUE.

On auroit encore eu la même somme 220 sols, si l'on avoit multiplié 28, nombre des pauvres par 9, nombre des sols qu'on a voulu donner, & que du produit 252 on eut ôté les 32 sols qui manquoient.

QUESTION III.

DE L'ASNE ET DU MULET.

Il arriva qu'un Mulet & un Asne faisant voyage ensemble portoient chacun un certain nombre de barils de vin. L'Asne se plaignoit de ce qu'il étoit trop chargé. Le Mulet lui dit : Vous n'avez point raison de vous plaindre ; car si vous me donniez un de vos barils, j'en aurois deux fois autant que vous, & si je vous en donnois un des miens, nous en porterions l'un autant que l'autre. Combien de barils avoient-ils chacun ?

LE Mulet avoit sept barils de vin, & l'Asne en avoit cinq : l'Asne donnant un baril au Mulet, n'en auroit plus eu que quatre, & le Mulet en auroit eu huit, qui est le double de la charge de l'Asne ; mais si le Mulet avoit donné un de ses barils à l'Asne, il en auroit encore eu six, & l'Asne en auroit aussi eu six.

REMARQUE.

On me permettra de mettre ici cette Question avec sa solution en Vers Latins.

Una-

Digitized by Google

Unà cum Mulo vinum portabat Asella,
Atque suo graviter ceu pondere pressa gemebat.
Talibus at dictis mox increpat ille gementem :
Mater, quid luges teneræ de more puellæ ?
Dupla tuis, si des mensuram, pondera gesto ;
At sit mensuram capias, æqualia porto.

Dic mihi mensuras sapiens Geometer istas ;
Non aliter Fhœbi nomine dignus eris.

Unam Asina accipiens, amittens Mulus & unam,
Si fiant æqui, certè utrique antè duobus
Distabant à se. Accipiat si Mulus at unam.
Amittatque Asina unam, tunc distantia fiet
Inter eos quatuor. Muli at cùm pondera duplà
Sint Asinæ ; Huic simplex, Mulo est distantia dupla :
Ergo habet hæc quatuor tantum, Mulusque habet octo.
Unam Asinæ si addas, si reddat Mulus & unam
Tunc ignota priùs tibi pondera clara patebunt :

SOLUTIO.

Mensuras quinque hæc, & septem Mulus habebat.

On peut exprimer cette Question en différentes manieres. En voici une en Latin avec sa réponse.

Ova olim juvenes duo ferebant,
Horum sic comitem lacessit alter :
Unum si dederis mihi tuorum
Ovorum, numerus mihi tibique
Par erit : cui mox regessit alter ;
Tu si mî dederis unum tuorum,
Duplo plura ego bajulabo quam tu.
ci ergo tulerit quot ova uterque ?

SOLUTIO.

Tot prior ova tulit, lustrum quot continet annos:
Posterior vaga quot sidera mundus habet.

Ce que les deux jeunes gens viennent de dire touchant les œufs qu'ils portent, ou ce que l'on fait dire au Mulet & à l'Asne, se met dans la bouche de deux amis, qui se trouvent ensemble : l'un dit à l'autre, si je vous donnois une de mes pistoles, vous en auriez autant que moi : l'autre répond, & moi si je vous en donnois une des miennes, vous en auriez deux fois autant que moi. Il paroît que chacun sçait le nombre des pistoles de son ami. Mais il n'en est pas de même de ceux à qui on propose cette Question : il faut qu'ils le devinent.

QUESTION IV.

Les trois Graces portant des couronnes de fleurs, rencontrerent les neuf Muses, à qui elles presenterent chacune un nombre égal de couronnes. La distribution faite, il se trouva que les Graces & les Muses en avoient chacune autant l'une que l'autre. On demande combien les Graces avoient de couronnes, & combien elles en donnerent.

LEs Graces avoient chacune douze couronnes & chacune en donna une. On peut supposer encore qu'elles en avoient 24, & que chacune en donna deux ; ou bien qu'elles en avoient 36, & que chacune en donna trois, & ainsi de suite, pourvû qu'en prenant les multiples de 12, on augmente à proportion le nombre des couronnes qui seront présentées.

Digitized by Google

QUESTION V.

Trois personnes veulent acheter une maison 26000 livres : mais ils sont convenus que l'un donneroit la moitié de l'argent, l'autre le tiers, & le troisiéme le quart. On demande combien ils doivent donner chacun.

CElui qui a promis la moitié de l'argent, doit donner 12000 livres : celui qui a promis le tiers doit donner 8000 livres, & celui qui a promis le quart doit donner 6000 livres. Ces trois sommes font ensemble 26000 livres.

QUESTION VI.

Un pere en mourant laisse sa femme enceinte : il ordonne par son testament que si elle accouche d'un garçon, il héritera des deux tiers de son bien, qui est de 3000 écus, & l'autre tiers sera pour la mere. Mais si elle accouche d'une fille, cette fille n'héritera que d'un tiers, & les deux autres tiers seront pour la mere. Il arrive que la mere accouche d'un garçon & de deux filles. On demande quel doit être le bien de chacun.

LA part qui doit revenir au garçon est de 1500 écus, moitié du bien du pere ; celle qui reviendra à la mere est de 750 écus, & les filles auront chacune 375 écus. Ces quatre sommes font ensemble 3000 écus.

QUESTION VII.

On dit d'une personne qu'elle a passé le quart de sa vie en l'enfance ; la cinquiéme partie en la jeunesse,

le tiers en l'âge viril, & qu'il y a 13 ans qu'elle a commencé à entrer dans la vieilleſſe. On demande l'âge de cette perſonne.

IL eſt facile de répondre que cette perſonne a ſoixante ans, qu'elle a paſſé 15 ans dans l'enfance, 12 ans dans la jeuneſſe, 20 ans dans l'âge viril; qu'enfin à 47 ans elle a commencé à entrer dans la vieilleſſe.

QUESTION VIII.

Quarante-une perſonnes ſe ſont trouvées à un repas: il y avoit des hommes, des femmes & des enfans. La dépenſe a été de 40 ſols: les hommes ont payé 4 ſols par tête, les femmes 3 ſols chacune, & les enfans 4 deniers chacun. On demande le nombre des hommes, celui des femmes & celui des enfans.

IL y avoit cinq hommes, trois femmes, & trente-trois enfans. Les cinq hommes ont payé 20 ſols, les trois femmes ont payé 9 ſols, & les trente-trois enfans ont payé 11 ſols. Ces ſommes font enſemble 40 ſols; & le nombre des hommes, des femmes & des enfans fait quarante & une perſonnes.

QUESTION IX.

Un Lion de bronze, placé ſur le baſſin d'une fontaine, peut jetter l'eau par les yeux, par la gueule & par le pied droit. S'il jette l'eau par l'œil droit, il emplira le baſſin en deux jours: s'il la jette par l'œil gauche, il l'emplira en trois jours: s'il la jette par le pied, il l'emplira en quatre jours; enfin s'il la jette par la gueule, il l'emplira en ſix heures. On demande en combien de tems le baſſin

Digitized by Google

ſera rempli, ſi le Lion jette l'eau en même tems par les yeux, par le pied, & par la gueule.

TOutes ces ouvertures laiſſant écouler l'eau en même tems, le baſſin ſera rempli en quatre heures, & environ quarante-quatre minutes. *Voyez les Remarques de la Queſtion ſuivante.*

QUESTION X.

Trois Imprimeurs veulent entreprendre l'impreſſion d'un Livre : l'un le peut imprimer en ſix mois ; l'autre ne le peut qu'en neuf mois, & le troiſiéme moins diligent, ou ayant moins d'Ouvriers, ne le peut imprimer qu'en douze mois. On demande en combien de tems cet ouvrage ſera imprimé, ſi on fait travailler les trois Imprimeurs en même-tems.

CEs Imprimeurs travaillant tous en même-tems à différentes parties de ce Livre, ils l'auront imprimé en deux mois vingt-trois jours & une heure ou environ.

REMARQUES.

L'un de ces Imprimeurs fait en un mois la ſixiéme partie de l'ouvrage ; l'autre la neuviéme, & l'autre la douziéme : ces fractions ajoutées enſemble font $\frac{13}{36}$. Pour avoir le tems demandé, il faut faire une regle de trois, dont le premier terme ſera 13, le ſecond ſera un mois, & le troiſiéme ſera 36 : le quatriéme terme donnera le tems demandé, après avoir réduit les reſtes dans les parties des mois & des jours.

Il en est de même à l'égard de la Question précédente : mais il faut réduire les jours en heures, à cause des six heures dont il est parlé. L'œil droit du Lion jettera en une heure un quarante-huitiéme d'eau pour emplir le bassin ; l'œil gauche en jettera un soixante & douziéme ; le pied droit en jettera un quatre-vingt-seiziéme, & la gueule en jettera un sixiéme. Toutes ces fractions réduites en une seule, on fera une regle de trois, comme on vient de le dire, dont le premier terme sera le numerateur ; le second une heure, & le troisiéme sera le dénominateur. Il viendra au quatriéme terme 4 heures & environ 44 minutes.

PROBLEME XXV.

Deux personnes étant convenuës de prendre à volonté des nombres moindres qu'un nombre proposé, en continuant alternativement jusqu'à ce que tous leurs nombres fassent ensemble un nombre déterminé plus grand que le proposé : faire qu'on arrive le premier à ce nombre déterminé plus grand.

POur faire que le premier arrive, par exemple, à 100, en supposant qu'il lui est libre, aussi-bien qu'au second, de prendre alternativement un nombre tel qu'il voudra, pourvu qu'il soit moindre, par exemple, que 11, il faut qu'il ôte ce nombre 11 de 100 autant de fois qu'il pourra, & alors il restera ces nombres 1, 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89, dont il doit se souvenir, & prendre le premier 1 : ainsi quelque nombre que le second prenne, il ne pourra pas empêcher le premier de parvenir au second nombre 12 ; car si le second prend, par exemple, 3, qui avec 1 fait 4, le pre-

Digitized by Google

mier n'a qu'à prendre 8, pour parvenir à 12 : après quoi, quelque nombre que prenne le ſecond, il ne pourra pas empêcher que le premier ne parvienne au troiſiéme nombre 23 ; car s'il prend, par exemple, 1, qui avec 12 fait 13, le premier n'a qu'à prendre 10, qui avec 13 fait 23, enſuite quelque nombre que le ſecond prenne, il ne pourra pas empêcher le premier de parvenir au quatriéme nombre 34, enſuite au cinquiéme 45, puis au ſixiéme 56, de-là au ſeptiéme 67, de-là au huitiéme 78, de-là au dernier 89, & enfin à 100.

Si le ſecond vouloit gagner, il eſt évident qu'il devroit prendre au commencement un nombre qui fût le reſte à 12 du nombre que le premier auroit pris, afin de pouvoir parvenir à 12 : comme ſi le premier avoit pris 2, le ſecond devroit prendre 10 : mais ſi le premier ſçait la fineſſe, il ne peut prendre que 1, & alors le ſecond devroit prendre 11 ; ce qui ne ſe peut, parce qu'ils ſont convenus de prendre des nombres moindres que 11. Mais ces ſortes de Jeux ne ſe font ordinairement qu'avec ceux qui les ignorent. Ainſi ſi le ſecond ne ſçait pas la fineſſe du Jeu, le premier qui veut gagner ne doit pas prendre toujours 1 au commencement, mais quelqu'autre nombre, après avoir gagné la premiere partie, en riſquant de perdre la ſeconde, pour mieux cacher l'artifice.

Si le premier veut gagner, il ne faut pas que le plus petit nombre propoſé meſure le plus grand : car dans ce cas le premier n'auroit pas une regle infaillible pour gagner. Par exemple, ſi au lieu de 11 on avoit pris 10 qui meſure 100, en ôtant 10 de 100, autant de fois qu'on le peut, on auroit ces nombres 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, dont le premier 10 ne pourroit pas être pris par le

premier ; cequi fait qu'étant obligé de prendre un nombre moindre que 10, si le second étoit aussi fin que lui, il pourroit prendre le reste à 10, & ainsi il auroit une regle infaillible pour gagner.

Il n'est pas nécessaire d'ôter le plus petit nombre du plus grand, autant de fois qu'on le peut, pour sçavoir le nombre que le premier doit prendre pour gagner ; car il suffit de diviser le plus grand par le plus petit, & le reste de la division sera le nombre que le premier doit choisir au commencement. Comme dans l'exemple proposé en divisant 100 par 11, il reste 1 pour le premier nombre du premier, auquel s'il ajoute 11, il aura 12 pour son second nombre, auquel ajoutant encore 11, il aura 23 pour son troisiéme nombre, & ainsi de suite jusqu'à 100.

PROBLEME XXVI.

Diviser un nombre donné en deux parties, dont la Raison soit égale à celle des deux nombres donnés.

QU'il faille diviser le nombre donné 60 en deux autres nombres tels que le plus petit soit au plus grand comme 1 est à 2, en sorte qu'une partie soit double de l'autre.

I.

Ajoutez ensemble les deux termes 1, 2, de la Raison donnée ; divisez par leur somme 3 le nombre donné 60 ; le quotient 20 sera le plus petit des deux nombres qu'on cherche, lequel étant ôté du nombre donné 60, le reste 40 sera le plus grand nombre.

Digitized by Google

II.

Ou bien multipliez les deux termes 1, 2 de la raiſon donnée, chacun par le nombre donné 60, diviſez les produits 60, 120, chacun par la ſomme 3 des deux mêmes termes 1, 2, & les deux quotiens 20, 40, ſeront les deux nombres qu'on cherche.

Ce Problême eſt le même que la ſeconde Queſtion du Livre premier de Diophante, & l'on peut aiſément par ſon moyen réſoudre les Queſtions ſuivantes.

QUESTION I.

Faire la monnoye d'un écu blanc en deux eſpeces différentes, en ſorte qu'il y ait autant d'une eſpece que de l'autre.

Comme l'on cherche une ſolution en nombres entiers, il eſt aiſé de connoître que cette Queſtion ne ſe peut pas réſoudre généralement pour toutes ſortes de monnoyes. Afin que la Queſtion ſoit poſſible, il faut que la ſomme des deux termes, qui expriment la Raiſon des deux eſpeces propoſées, puiſſe diviſer exactement la valeur d'un écu blanc, lorſqu'il ſera réduit en la monnoye la plus baſſe.

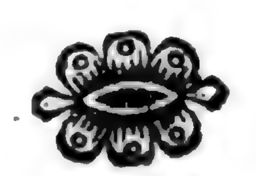
Ainſi en faiſant valoir 60 ſols un écu blanc, ou 240 liards, on connoît qu'on en peut donner la monnoye en ſols & en liards, parce que ſa valeur 240 ſe peut diviſer par la ſomme 5 des deux termes 1, 4, qui expriment la raiſon d'un liard à un ſol, parce que quatre liards font un ſol. Si donc on diviſe 240 liards par 5, on aura 48 liards, & par conſéquent 48 ſols, pour la ſolution de la

Question. Car 48 sols avec 48 liards, qui valent 12 sols, font 60 sols, telle qu'est la valeur supposée d'un écu blanc.

On connoîtra de la même façon, qu'il faut 12 sols & 12 pieces de quatre sols pour faire un écu de 60 sols, parce que divisant 60 par 5, le quotient est 12; & qu'il faut 13 sols & 13 pieces de quatre sols pour faire un écu de 65 sols, parce que divisant 65 par 5, le quotient est 13.

De même pour donner en sols & en pieces de quatre sols la monnoye d'un louis d'or valant 11 livres, ou 220 sols, en sorte qu'il y ait autant de sols que de pieces de quatre sols, il faut 44 sols, & 44 pieces de quatre sols, parce que divisant 220 par 5, le quotient est 44: & que pour donner dans les deux mêmes especes la monnoye d'un louis d'or valant 12 livres 5 sols, ou 245 sols, en sorte qu'il y ait autant d'une espece que de l'autre. Il faut 49 sols & 49 pieces de quatre sols, parce que divisant 245 par 5, le quotient est 49.

Enfin l'on connoîtra que pour faire la monnoye en sols & en deniers d'un écu valant 65 sols, ou 780 deniers, en sorte qu'il y ait autant de sols que de deniers, il faut 60 sols, & 60 deniers, parce que divisant 780 par 13, qui est la somme des deux termes 1, 12, qui expriment la Raison d'un denier à un sol, parce qu'un sol contient 12 deniers, le quotient est 60. Ainsi des autres.



Digitized by Google

QUESTION II.

Un Marchand de vin n'a que deux ſortes de vin, l'un à 10 ſols, & l'autre à 5 ſols la bouteille. On lui demande 30 bouteilles de vin à 8 ſols. Que doit-il faire pour mêler ces deux vins, de ſorte que la bouteille revienne à 8 ſols?

IL faut qu'il prenne les différences du prix de ſes vins au prix du vin demandé. Ces différences ſont 2, 3, qui ſeront les termes d'une Raiſon donnée. La ſomme de ces différences eſt 5. Premierement pour trouver le nombre des bouteilles de vin à 5 ſols qu'il doit prendre pour le mêlange; il faut, ſelon l'article II. qu'il multiplie 30 nombre des bouteilles demandées par 2, différence de 10, prix de l'un de ſes vins, & de 8 prix du vin demandé, & qu'il diviſe le produit 60 par 5, ſomme des différences: le quotient 12 eſt le nombre des bouteilles de vin à 5 ſols, qu'il prendra pour le mêlange. Secondement, pour trouver le nombre des bouteilles de vin à 10 ſols, qu'il doit prendre pour le mêlange, il faut, ſuivant le même article II. qu'il multiplie le même nombre 30 par 3, différence de 5, prix de l'autre de ſes vins, & de 8, prix du vin demandé, & qu'il diviſe le produit 90 par 5, ſomme des différences: le quotient 18 eſt le nombre des bouteilles de vin à 10 ſols, qu'il prendra pour le mêlange. Ainſi ayant mêlé 12 bouteilles de vin à 5 ſols avec 18 bouteilles à 10, il en aura 30, qui reviendront à 8 ſols la bouteille. Ce qu'il eſt aiſé de reconnoître en multipliant 18 par 10, & 12 par 5; les deux produits 180, 60, ajoutés, ſont égaux à 240, produit de 30 par 8.

PROBLEME XXVI.

Trouver un nombre tel qu'étant divisé séparément par des nombres donnés, il reste par-tout 1, & étant divisé par un autre nombre donné, il ne reste rien.

I.

POur trouver un nombre tel qu'étant divisé séparément par les deux nombres donnés, 5, 7, chaque reste soit 1; & étant divisé par ce troisiéme nombre donné 3, qui doit être premier avec les deux précédens, il ne reste rien; multipliez ensemble les deux premiers nombres donnés 5, 7, pour avoir leur produit 35, auquel ajoutant 1, on aura ce nombre 36, qui sera tel qu'étant divisé par 5 & par 6, il restera 1. Et comme il arrive que ce même nombre 36 étant divisé par le troisiéme nombre donné 3, il ne reste rien; il s'ensuit que 36 est le nombre qu'on cherche.

Mais on peut trouver une infinité d'autres nombres plus grands, qui satisferont aux conditions du Problême; ce qui se fera par le moyen du premier & plus petit nombre trouvé 36, en cette sorte.

Pour trouver un second nombre, ajoutez le premier nombre trouvé 36 au produit 105 des trois nombres donnés 5, 7, 3, & la somme 141 sera le second nombre qu'on cherche, auquel ajoutant le produit précédent 105, on aura 246 pour troisiéme nombre, auquel si l'on ajoute le même produit 105, on aura 351 pour quatriéme nombre, & ainsi de suite.

II.

De même pour trouver un nombre tel qu'étant

divisé séparément par les trois nombres donnés 2, 3, 5, il reste 1, & étant divisé par ce quatriéme nombre donné 11, qui doit aussi être premier avec les trois précédens 2, 3, 5, il ne reste rien; multipliez ensemble les trois premiers nombres donnés 2, 3, 5, pour avoir leur produit 30, auquel ajoutant 1, on aura ce nombre 31, qui étant divisé par chacun des trois nombres donnés 2, 3, 5, donnera pour reste 1. Si ce nombre 31 étant divisé par le quatriéme nombre donné 11, il ne reste rien, il seroit celui qu'on cherche; mais parce qu'il reste 9, le nombre 31 n'est pas celui qu'on cherche. Pour le trouver, voici ce qu'on fera.

Divisez 30 par 11, & ayant négligé le quotient 2, servez-vous du reste 8 en cette sorte. Cherchez au nombre 11 un multiple, qui surpasse de l'unité un multiple de 8. * Vous trouverez que 33, multiple de 11 surpasse de l'unité 32, multiple de 8. Divisez 32 par 8, reste trouvé, & vous aurez pour quotient 4, par lequel vous multiplierez le produit déja trouvé 30. Ce second produit 120, augmenté de l'unité, sera le nombre cherché: car 121 est exactement divisible par 11, & donne pour reste 1 étant divisé par 2, 3, 5. Par le moyen de ce nombre 121, on en pourra trouver autant qu'on voudra en cette sorte.

Pour avoir un second nombre, ajoutez le premier nombre trouvé 121 à 330, produit des qua-

* On ne peut faire cette recherche, qu'en essayant, ou, comme on dit, en tatonnant. Mais comme il ne s'agit que des petits nombres, il n'est point difficile de trouver ces multiples. Il ne seroit pas nécessaire de chercher un multiple de 11, si on trouvoit un multiple de quatre, qui fût moindre de l'unité qu'un multiple de 11.

tre nombres donnés 2, 3, 5, 11, & la somme 451 sera le second nombre qu'on cherche, auquel ajoutant le produit précédent 330, on aura 781 pour troisiéme nombre, auquel, si on ajoute pareillement le même produit 330, on aura 1111 pour quatriéme nombre, & ainsi de suite.

III.

On pourra par un semblable raisonnement trouver un nombre tel qu'étant divisé séparément par ces trois nombres donnés 3, 5, 7, il reste un autre nombre que l'unité, par exemple, 2, & étant divisé par ce quatriéme nombre donné 8, il ne reste rien. Multipliez ensemble les trois premiers nombres donnés 3, 5, 7, divisez leur produit 105 par le quatriéme nombre donné 8; & négligeant le quotient, servez-vous du reste 1, auquel vous cherchez un multiple qui soit moindre que 8 de 2, * parce qu'il s'agit de trouver un nombre qui ait 2 pour reste. Ce multiple est 6, divisez-le par un, qui est le reste trouvé: le quotient est 6, par lequel vous multiplierez ce premier produit 105. Ce second produit 630, augmenté de 2, sera le nombre cherché: car 632 est exactement divisible par 8, & il donne 2 pour reste, si on le divise par 3, 5, 7. Ce même nombre 632 servira à en trouver autant d'autres qu'on voudra qui auront la même proprieté, par une méthode semblable à la précédente, comme vous allez voir.

Pour trouver un second nombre plus grand, ajoutez le nombre trouvé 632 au produit 840

* Il n'est point nécessaire de chercher ici un multiple de 8, puisque 8 surpasse 6 multiple de 1, de 2.

Digitized by Google

des quatre nombres donnés, 3, 5, 7, 8, & la somme 1472 sera le second nombre qu'on cherche, auquel ajoutant le produit précédent 840, on aura 2312 pour le troisiéme nombre ; auquel si l'on ajoute encore le même produit 840, on aura 3152 pour le quatriéme nombre, & ainsi de suite.

I V.

De même, pour trouver un nombre tel qu'étant divisé par ces trois nombres donnés 3, 5, 7, il reste 2, & étant divisé par ce quatriéme nombre donné 11, il ne reste rien ; divisez le produit 105 des trois premiers nombres donnés 3, 5, 7, par le quatriéme 11 ; & négligeant le quotient, servez-vous du reste 6, pour l'usage que je vais indiquer. Cherchez un multiple de 11, qui surpasse de 2 un multiple de 6. * Vous trouverez 44, multiple de 11, & 42 multiple de 6. Divisez 42 par le reste 6 trouvé, le quotient sera 7, par lequel vous multiplierez le premier produit 105. Ce second produit 735, augmenté de 2, sera le nombre cherché. Car 737 est divisible sans reste par 11, & si on le divise par ces nombres 3, 5, 7, séparément, il reste 1.

* Voyez la note de la page 189.

Par le moyen de ce nombre 737, on en pourra trouver autant d'autres qu'on voudra, en y ajoutant 1155, produit des nombres 3, 5, 7, 11, comme on l'a enseigné dans les exemples précédens.

V.

De même, pour trouver un nombre tel qu'étant divisé par 5, ou par 7, ou par 8, il reste 3, & étant divisé par 11, il ne reste rien, on multipliera ensemble ces trois nombres 5, 7, 8, dont on

Digitized by Google

divisera le produit 280 par 11, pour avoir le reste 5, en négligeant le quotient. On cherchera ensuite un multiple de 11, qui surpasse de 3 un multiple de 5. On trouvera 33, multiple de 11, & 30, multiple de 5 : puis on divisera 30 par 5, & l'on aura pour quotient 6, par lequel on multipliera le premier produit 280. Ce second produit 1680, augmenté de 3, sera le nombre cherché. Car 1683 se divise exactement par 11, & donne 3 pour reste, étant divisé par les nombres proposés 5, 7, 8.

C'est par le moyen de ce Probléme qu'on peut résoudre la Question suivante.

QUESTION.

Trouver combien il y avoit de Louis d'or dans une bourse qu'une personne dit avoir perdue, & qui assure qu'en les comptant deux à deux, ou trois à trois, ou cinq à cinq, il en restoit toujours un, & qu'en les comptant sept à sept, il n'en restoit point.

IL s'agit ici de trouver un nombre tel qu'étant divisé par celui qu'on voudra des trois nombres donnés 2, 3, 5, il reste 1, & étant divisé par le quatriéme nombre donné 7, il ne reste rien ; car ce nombre sera celui des Louis d'or qui étoient dans la bourse. Et comme il y a plusieurs nombres qui peuvent satisfaire à la question, comme on a vû au Probléme précédent, on pourra juger par la grosseur, ou par la pesanteur de la bourse, du nombre des Louis d'or qu'elle pouvoit contenir.

Mais pour trouver le moindre de tous ces nombres, cherchons premierement un nombre qui soit exactement

Digitized by Google

exactement divisible par 2, par 3, & par 5, & qui étant augmentée de 1, soit aussi exactement divisible par 7. Si on multiplie ensemble les trois premiers nombres donnés 2, 3, 5, leur produit 30 sera divisible par chacun de ces trois nombres; mais en y ajoutant 1, la somme 31 n'est pas divisible par le quatriéme nombre donné 7; car il reste 3. Divisez donc 30 par le quatriéme nombre proposé 7; la division donnera 2 pour reste, & vous negligerez le quotient. Prenez 6 multiple de 2, qui est moindre que 7 de l'unité. * Divisez-le par 2, reste trouvé, & vous aurez 3 pour quotient, par lequel vous multiplierez le premier produit 30. Ce second produit 90, augmenté de 1, sera le premier nombre cherché; car 91 se divise sans reste par 7, & donne 1 pour reste, s'il est divisé par les nombres proposés 2, 3, 5.

* Voyez la note de la page 189.

Pour trouver un second nombre plus grand, qui satisfasse à la question, multipliez ensemble les quatre nombres donnés 2, 3, 5, 7, ajoutez à leur produit 210 le premier & plus petit nombre trouvé 91; la somme 301 sera le second nombre qu'on cherche, auquel si l'on ajoute le produit précédent 210, la somme 511 sera un troisiéme nombre qui satisfera, auquel pareillement si l'on ajoute le même produit 210, la somme 721 sera un quatriéme nombre qui satisfera, & ainsi à l'infini.

Ainsi pour la résolution de la Question, l'on peut dire que dans la bourse perdue, il pouvoit y avoir 91 louis d'or, ou bien 301, ou bien 511, ou bien encore 721, & c'est selon la grosseur de la bourse, comme nous avons déja dit, qu'il en faut juger.

I. REMARQUE.

On peut proposer cette Question d'une autre

Digitized by Google

maniere. Une pauvre femme porte au marché un panier d'œufs ; mais venant à être heurtée, elle laisse tomber son panier, & tous les œufs sont cassés. Celui qui a causé ce malheur veut payer les œufs ; il demande à la femme combien elle avoit d'œufs dans son panier : elle lui répond qu'il y en avoit environ trois cens ; que les comptant deux à deux, trois à trois, quatre à quatre, cinq à cinq, six à six, il restoit toujours 1, & les comptant sept à sept, il ne restoit rien.

La Question est ici déterminée par la condition que la femme a mise, en disant qu'il y avoit environ 300 œufs. Ainsi le nombre 301 sera le nombre des œufs. Si la condition n'y avoit point été mise, il en auroit fallu juger par la grandeur du panier. Mais on en jugera plus sûrement en demandant à la femme à peu près le nombre, comme de 300, ou de 500, ou de 700, &c. Alors, selon sa réponse, on choisit celui des nombres qui approche le plus de celui qu'elle a répondu.

II. REMARQUE.

Peut-être ne trouvera-t-on pas mauvais qu'on mette ici la solution du premier article de ce Problême par Algebre. On suivra la méthode que M. de Lagny, de l'Academie Royale des Sciences, a indiqué dans ses nouveaux Elémens d'Arithmetique & d'Algebre, p. 430. Elle peut être d'un grand secours dans les Problêmes indéterminés.

I.

Il s'agit de trouver un nombre x tel qu'étant divisé par 3, il ne reste rien, étant divisé par 5,

il reste 1, & étant divisé par 7, il reste encore 1. La question proposée se réduira à ces équations. 1°. $\frac{x}{3} = p$. 2°. $\frac{x-1}{5} = n$.

Je choisis les deux premieres équations pour les comparer l'un à l'autre, & je les réduis à cette expression. 4°. $x = 3p = 5m + 1$: par conséquent $p = \frac{5m+1}{3}$, où m est indéterminé : pour le trouver, voici le raisonnement que je fais.

Puisque $5m + 1$ doit être divisé exactement par 3, toutes les différences de $5m + 1$ à 3 son dénominateur, ou, ce qui est la même chose, à $3m$, doivent être aussi divisées par 3. Ainsi pour trouver la derniere différence, où m demeure seule, j'ôte autant de fois qu'il est possible $3m$ de $5m+1$: la premiere différence est $2m+1$, & j'ai $\frac{2m+1}{3}$: mais m n'étant point seule, cette expression ne convient pas : j'ôte donc $2m+1$ de $3m$ son dénominateur, & j'ai $m - 1$, qui étant divisé par 3, donne ce rapport $\frac{m-1}{3}$.

Pour trouver la valeur de m, qui est indéterminé, je suppose, 1°. $\frac{m-1}{3} = 0$, qui donne $m = 1$. 2°. $\frac{m-1}{3} = 1$, qui donne $m = 4$. 3°. $\frac{m-1}{3} = 2$, qui donne $m = 7$, &c. $m = 1$ ne pouvant satisfaire aux équations comparées, je prens $m = 4$, qui donne la solution des équations comparées dans la quatriéme expression $x = 3p = 5m + 1$: car $x = 21$, qui étant divisé par 3, n'a point de reste, & étant divisé par 5, donne 1 pour reste.

Mais si je substitue 21 dans la troisiéme supposition $\frac{x-1}{7}$, je trouve que $\frac{21-1}{7}$, ne donne point au quotient un nombre qui ait 1 pour reste. Je

cherche donc une autre valeur de m dans toutes celles qu'on peut trouver, & j'essaye celle qui peut convenir : pour la trouver plus sûrement, voici encore le raisonnement que je fais.

Puisque dans la recherche que j'ai fait de la valeur de m par cette expression $\frac{m-1}{3}$, j'ai supposé que $\frac{m-1}{3}$ étoit égal à un nombre pris à volonté, tel que 0; 1, 2; 3; 4, &c. Je suppose qu'un de ces nombres pris à volonté & indéterminé, soit égal à f; ainsi j'aurai $\frac{m-1}{3}=f$, d'où l'on aura $m=3f+1$. Substituant donc ce $3f+1$ dans la quatriéme équation $x=5m+1$, je trouverai $5m+1=15f+5+1=x$. Ainsi dans la troisiéme équation $\frac{x-1}{7}=n$, je substitue $15f+6$ au lieu de x, ce qui me donne $\frac{15f+5}{7}$. J'ôte $7f$ autant de fois que je le puis de $15f+5$, pour avoir la derniere différence $f+5$, qui étant divisée par 7, donne $\frac{f+5}{7}$.

Ainsi pour avoir la valeur de f, je suppose; 1° $\frac{f+5}{7}=0$, qui donne $f=-5$, qui ne peut convenir. 2°. $\frac{f+5}{7}=1$, qui donne $f=7-5=2$, & cette valeur de f donne la solution des trois équations proposées. Car substituant 2 à la place de f dans cette équation $m=3f+1$, j'aurai $m=7$ & $x=5m+1=36$, qui est le nombre cherché.

On trouvera d'autres nombres que 36, si on suppose $\frac{f+5}{7}$ égal à 2, à 3, à 4, &c.

Digitized by Google

II.

Si j'avois comparé enſemble la troiſiéme & la ſeconde équation $\frac{x-1}{7} = n$ & $\frac{x-1}{5} = m$, j'aurois eu $x = 7n + 1 = 5m + 1$, & $n = \frac{5m}{7}$, & l'on auroit vû que m doit être égal à 7, ou à un multiple de 7. Car ſi l'on ôte $5m$ de $7m$, on aura pour premier reſte $2m$, dont le double $4m$ étant ôté de $5m$, donnera m : par conſéquent on aura $\frac{m}{7}$. Si on fait $\frac{m}{7} = 1$, on aura $m = 7$. Si l'on fait encore $\frac{m}{7} = 2$, on aura $m = 14$, &c. $m = 7$ ſatisfait à la queſtion: car $x = 5m + 1 = 36$. $m = 14$ y ſatisfait auſſi, & donne un autre nombre que 36; & ainſi de ſuite à l'infini.

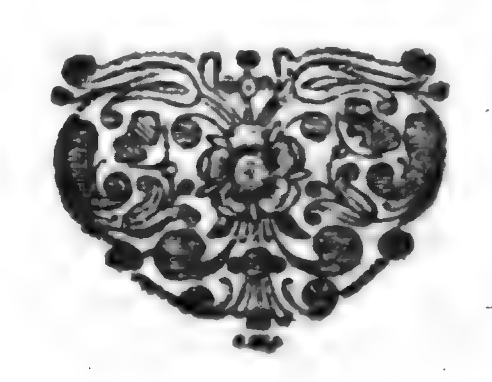
III.

Si l'on avoit propoſé un plus grand nombre d'équations, comme, 1°. $\frac{x-1}{2} = m$. 2°. $\frac{x-1}{3} = n$. 3°. $\frac{x-1}{5} = p$. 4°. $\frac{x}{11} = q$. On auroit fait 5°. $x = 2m + 1 = 3n + 1$, & par conſéquent $m = \frac{3n}{2}$. J'ôte $2n$ de $3n$, il reſte n. Donc $m = \frac{n}{2}$. D'où je fais 1°. $\frac{n}{2} = 1$, qui donne $n = 2$. 2°. $\frac{n}{2} = 2$, qui donne $= 4$. 3°. $\frac{n}{2} = 3$, qui donne $n = 6$, &c. Je ſubſtitue quelqu'une de ces valeurs d'n dans la cinquiéme équation $x = 3n + 1$, & je trouve que les deux valeurs 2 & 4 de n ſatisfont dans les deux premieres équations comparées; mais elles ne ſatisfont point dans la troiſiéme queſtion $\frac{x-1}{5} = p$.

C'eſt pourquoi je prens $n = 2f$, que je ſubſtitue

dans la cinquiéme équation $x = 3n + 1$, & j'ai ; 6°. $x = 6f + 1$, qui étant substitué dans $\frac{x-1}{5}$, troisiéme expression, donne $\frac{6f}{5}$, & ôtant $5f$ de $6f$, il restera f, qui divisé par 5, donnera $\frac{f}{5}$, & par conséquent 1°. $\frac{f}{5} = 1$, qui donne $f = 5$. 2°. $\frac{f}{5} = 2$ qui donne $f = 10$, &c. La premiere valeur 5 de f substitué dans la sixiéme expression $x = 6f + 1$, donne la solution des trois premieres équations; mais elle ne donne point la solution de la quatriéme $\frac{x}{1}$. Car $31 = x$ ne peut être exactement divisé par 11.

Je fais donc $f = 5g$, que je mets à la place de f dans la sixiéme équation $x = f + 1$, ce qui donne 7. $x = 30g + 1$, que je substitue dans la quatriéme équation $\frac{x}{11}$, & j'ai $\frac{30g+1}{x}$. J'ôte $30g+1$ de $33g$ multiple de $11g$, il reste $3g - 1$. J'ôte $3g-1$ ou son multiple $9g$, 3 de $11g$, puis le reste $2g+3$ de $3g-1$, je trouve pour dernier reste $g-4$. Faisant $\frac{g-4}{11} = 0$, on a $g = 4$, qui donne la solution de la septiéme équation $x = 30g + 1 = 121$, qui convient aux quatre équations proposées.



Digitized by Google

PROBLEME XXVIII.

Diviser plusieurs nombres donnés chacun en deux parties, & trouver deux nombres, en sorte que multipliant la premiere partie de chacun des nombres donnés par le premier nombre trouvé, & la seconde par le second, la somme des deux produits soit par tout la même.

SI on donne, par exemple, ces trois nombres 10, 25, 30, & qu'on veuille avoir une solution en nombres entiers, prenez pour les deux nombres qu'on cherche, deux nombres quelconques, pourvû que leur différence soit 1, ou telle qu'elle puisse diviser exactement le produit sous le plus grand de ces deux nombres, & la différence de deux quelconques des trois nombres donnés, & que le plus grand de ces deux nombres, multiplié par le plus petit nombre donné 10, surpasse le plus petit des deux mêmes nombres, multiplié par le plus grand nombre donné 30.

Choisissez, par exemple, 2 & 7; leur différence 5 mesure exactement 105, produit de 7 grand nombre choisi, & de 15, différence de 25 & de 10. De plus, 70 produit de 7, grand nombre choisi, par 10 le plus petit nombre donné, surpasse 60 produit du plus grand nombre donné par 2, petit nombre choisi.

Ayant donc trouvé les deux nombres qu'on cherche, 2, 7, la premiere partie du premier nombre donné 10, se pourra prendre à volonté, pourvû qu'elle soit moindre que le nombre donné 10, & que le nombre 10, qui reste en ôtant 60 produit de 2, petit nombre trouvé par le plus grand donné

30 de 70 produit de 7, grand nombre trouvé par le plus petit nombre donné 10. Cette premiere partie doit être aussi moindre que 2, quotient de ce reste 10, divisé par 5, différence des deux nombres choisis 2, 7. Elle sera donc 1, que l'on ôtera du premier nombre donné 10, le reste 9 sera l'autre partie, laquelle étant multipliée par le second nombre trouvé 7, & la premiere 1 étant multipliée par le premier nombre trouvé 2, la somme des deux produits 63, 2, est 65.

Pour trouver la premiere partie du second nombre donné 25, multipliez la différence 15 des deux premiers nombres donnés 10, 25, par le plus grand nombre trouvé 7, & ayant divisé le produit 105 par la différence 5 des deux nombres trouvés 2, 7, ajoutez le quotient 21 à la premiere partie trouvée 1 du premier nombre donné 10, & la somme 22 sera la premiere partie du second nombre donné 25; c'est pourquoi l'autre partie sera 3, laquelle étant multipliée par le second nombre trouvé 7, & la premiere 22 par le premier 2, la somme des deux produits 21, 44, fait aussi 65.

Enfin pour trouver la premiere partie du troisiéme nombre donné 30, multipliez la différence 5 des deux derniers nombres donnés 25, 30, par le plus grand nombre trouvé 7, & ayant divisé le produit 35 par la différence 5 des deux nombres trouvés 2, 7, ajoutez le quotient 7 à la premiere partie 22 du second nombre donné 30, & la somme 29 sera la premiere partie du troisiéme nombre donné 30, c'est pourquoi l'autre partie sera 2, laquelle étant multipliée par le second nombre trouvé 7, & la premiere 29 par le premier 2, la somme des deux produits 7, 58, fait aussi 65.

Ou bien multipliez la différence 20 du premier & du troisiéme nombre donné, par le plus grand nombre trouvé 7, & ayant divisé le produit 140 par la différence 5 des deux nombres trouvés 2, 7, ajoutez le quotient 28 à la premiere partie 1, du premier nombre donné 10, & vous aurez 29, comme auparavant, pour la premiere partie du troisiéme nombre donné 30.

Si l'on prend 1, 6, pour les deux nombres qu'on cherche, & 4 pour la premiere partie du premier nombre donné 10, auquel cas l'autre partie sera 6, qui étant multipliée par le second nombre trouvé 6, & la premiere 4 par le premier 1, la somme des deux produits 36, 4, est 40; la premiere partie du second nombre donné 25 sera 22, & l'autre partie par conséquent sera 3, qui étant multipliée par le second nombre trouvé 6, & la premiere 22 par le premier 1, la somme des deux produits 18, 22, est aussi 40; enfin la premiere partie du troisiéme nombre donné 30 sera 28; ce qui fait que l'autre partie sera 2, qui étant multipliée par le second nombre trouvé 6, & la premiere 28 par le premier 1, la somme des deux produits 12, 28, est aussi 40. Ce Problême sert à résoudre la Question suivante.

QUESTION I.

Une femme a vendu 10 pommes au marché à un certain prix, une autre femme en a vendu 25 au même prix, & une troisiéme femme en a vendu 30 aussi au même prix, & chacune a rapporté une même somme d'argent. On demande comment cela se peut faire.

IL est évident qu'afin que la Question soit possible, il faut que les femmes vendent leurs pom-

mes à deux diverſes fois, & à divers prix, bien qu'à chaque fois elles vendent chacune à un même prix. Si ces deux prix différens ſont 2, 7, qui ſont

	Pom.		*Den.*	*Pom.*		*Den.*	
10.	1	*à*	2	9	*à*	7	
25.	22	*à*	2	3	*à*	7	65
30.	29	*à*	2	1	*à*	7	

les deux nombres que nous avons trouvés au Problême précédent; & ſi l'on ſuppoſe que la premiere fois elles vendent 2 deniers la pomme, & qu'à ce prix la premiere vende 1 pomme, la ſeconde 22, & la troiſiéme 29, les trois nombres 1, 22, 29, feront les premieres parties des trois nombres donnés 10, 25, 30, comme elles ont été trouvées au Problême précédent. Dans ce cas la premiere femme aura 2 deniers, la ſeconde en aura 44, & la troiſiéme en aura 58. Enſuite, ſi on ſuppoſe qu'elles vendent le reſte de leurs pommes 7 deniers la pomme, alors la premiere femme aura 63 deniers pour neuf pommes qui lui reſtent, la ſeconde aura 21 deniers pour 3 pommes qui lui reſtent, & la troiſiéme aura 7 deniers pour 1 pomme qui lui reſte; de ſorte que chacune aura en tout 65 deniers.

Ou bien ſi les deux prix différens ſont 1, 6, qui ſont deux autres nombres que nous avons trouvés au Problême précédent; & ſi l'on ſuppoſe que la premiere fois elles vendent 1 denier la pomme, & qu'à ce prix la premiere vende 4 pommes, la ſeconde 22, & la troiſiéme 28, ces trois nombres 4, 22, 28, feront les premieres parties des trois nombres donnés 10, 25, 30, comme elles ont été trouvées au Problême précédent. Dans ce cas la

Digitized by Google

premiere femme aura 4 deniers, la seconde en aura

	Pom.		Den.	Pom.		Den.	
10.	4	à	1	6	à	6	40
25.	22	à	1	3	à	6	
30.	28	à	1	2	à	6	

22, & la troisiéme en aura 28. Ensuite si on suppose qu'elles vendent le reste de leurs pommes 6 deniers la pomme, alors la premiere femme aura 36 deniers pour six pommes qui lui restent, la seconde aura 18 deniers pour 3 pommes qui lui restent, & la troisiéme aura 12 deniers pour 2 pommes qui lui restent; de sorte que chacune aura en tout 40 deniers.

REMARQUES.

I.

Ceux qui voudront être instruits plus à fond sur la solution de ces sortes de questions, pourront consulter ce qui en est dit dans la seconde partie de l'Arithmetique universelle, p. 456. On y traite en particulier celle qui est ici proposée; on dit qu'elle a seulement 6 solutions, & que la plus grande somme est 65. Je vais entreprendre de la résoudre par l'Algébre, pour faire voir la fécondité de l'Analyse, qui renferme des richesses qu'on tire de son sein, quand on est assez heureux pour la traiter avec ménagement. Je rapporterai dix solutions différentes de cette même question, les sommes de chaque femme seront, après chacune des dix ventes, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70. J'espere que cela fera plaisir à ceux qui commencent à apprendre l'Algebre, & je crois que ce sera pour eux une récréation.

II.

Il faut ſe ſouvenir que trois femmes ayant porté des pommes au marché, l'une en a vendu 10, l'autre 25, & la troiſiéme 30, à un même prix; & qu'étant revenue du marché, elles ont rapporté toutes trois une même ſomme. On ſe ſouviendra encore qu'elles doivent avoir vendu à deux différentes repriſes, & à divers prix chaque fois.

J'appelle u le prix auquel les trois femmes ont vendu leurs pommes dans la premiere vente, & p le prix auquel elles ont vendu le reſte dans la ſeconde vente.

Je nomme x le nombre des pommes de la premiere femme, vendues au prix u; par conſéquent le reſte de ſes pommes vendues dans la ſeconde vente au prix p, ſera $10-x$. Ainſi l'argent de la premiere vente ſera xu, & celui de la ſeconde vente ſera $10p-px$: la ſomme eſt $xu+10p-px$.

Je nomme z le nombre des pommes vendues au prix u par la ſeconde femme: par conſéquent le reſte de ſes pommes vendues dans la ſeconde vente au prix p, ſera $25-z$. Ainſi l'argent de la premiere vente ſera zu, & celui de la ſeconde vente ſera $25p-pz$; la ſomme eſt $zu+25p-pz$.

Enfin je nomme y le nombre des pommes vendues par la troiſiéme femme au prix u; par conſéquent le reſte de ſes pommes vendues dans la ſeconde vente au prix p, ſera $30-y$. Ainſi l'argent de la premiere vente ſera yu, & celui de la ſeconde vente ſera $30p-py$: la ſomme de cette troiſiéme femme eſt $zu+30p-py$.

Je raſſemblerai dans cette Table tous ces différens prix: ceux qui ſont à gauche marquent les prix des pommes vendues par les trois femmes

dans la premiere vente, & ceux qui sont à droite marquent les prix des pommes vendues dans la seconde vente.

	1re vente.	2e vente.
1re femme.	xu	$10p-px$
2e femme.	zu	$25p-pz$
3e femme.	yu	$30p-py$

La somme que rapporte la premiere femme est $xu+10p-px$.

La somme que rapporte la seconde femme est $zu+25p$ pz.

La somme que rapporte la troisiéme femme est $yu+30p-py$.

Ces trois sommes doivent être égales, c'est-à-dire, que $xu+10p-px=zu+25p-pz=yu+30p-py$. D'où je tire ces équations, 1o. en comparant les deux premieres sommes $xu+10p-px=zu+25p-pz$; d'où l'on a $xu-px=zu-pz+15p$, & divisant tout par $u-p$, on trouve $x=z+\frac{15p}{u-p}$. 2° en comparant la premiere & la troisiéme somme $xu+10p-px=yu+30p-py$, d'où l'on a $xu-px=yu-py+20p$, & divisant encore tout par $u-p$, on a $x=y+\frac{20p}{u-p}$. 3°. en comparant la seconde & la troisiéme somme $zu+25p-pz=yu+30p-py$, d'où l'on a $zu-pz=yu-py+5p$, & divisant tout par $u-p$, on a $z=y+\frac{5p}{u-p}$.

On voit dans ces trois équations que la différence de u à p ($u-p$) doit être un diviseur exact de 15, de 20 & de 5, c'est-à-dire, des différences des nombres des pommes portées au marché. Mais pour parvenir avec quelque certitude à la valeur

de $u-p$, je choisis la fraction $\frac{5p}{u-p}$, où se trouve le plus petit numérateur 5, qui est un diviseur commun des trois différences, & je fais d'abord $\frac{5p}{u-p}=0$, qui donnant $5p=0$, n'est d'aucune utilité. Je fais ensuite $\frac{5p}{u-p}=1$, qui donne $5p=u-p$, ou $6p=u$, & faisant $p=1$, j'ai $6=u$. Ces valeurs d'u & de p, serviront pour les sept premieres solutions qu'on va donner. Ainsi au lieu des trois équations que je viens de trouver, j'aurai ces trois autres 1°. $x=z+3$. 2°. $x=y+4$. 3°. $z=y+1$, qui sont encore indéterminées : mais on n'a besoin que de la derniere & de l'une des deux premieres.

Premiere Solution.

Pour déterminer la valeur des inconnues x, z, y, je suppose $y=0$ donc $z=1$ par la troisiéme équation, & $x=4$, par la premiere ou seconde équation. Ayant donc aussi supposé $p=1$ & $u=6$, comme on vient de voir, la somme, que chaque femme rapportera, sera 30 deniers.

$$\text{Sommes.}\begin{cases} 1^{e}\text{ Fem. } xu+10p-px=24+10-4=30. \\ 2^{e}\text{ Fem. } zu+25p-pz=6+25-1=30. \\ 3^{e}\text{ Fem. } yu+30p-py=0+30-0=30. \end{cases}$$

Observation.

En considerant la Table qu'on a mis ci-dessus, on remarquera que la premiere femme doit vendre 4 pommes à 6 deniers dans la premiere vente, & par conséquent 6 pommes à 1 denier dans la deuxiéme vente ; que la seconde femme doit vendre 1 pomme à 6 deniers dans la premiere vente, & 24 pommes à 1 denier dans la deuxiéme vente ;

que la troisiéme femme ne doit vendre aucune pomme dans la premiere vente, & qu'elle les vendra toutes 30 à 1 denier dans la deuxiéme vente ; ce qui fait que chacune doit rapporter 30 deniers du marché. On appliquera cette observation aux solutions suivantes.

Seconde Solution.

Je suppose $y=1$, par conséquent $z=2$ (troisiéme équation) & $x=5$ (premiere ou seconde équation.) $u=6$ & $p=1$.

Sommes.
- 1e Fem. $xu + 10px- = 30 + 10 - 5 = 35$.
- 2e Fem. $zu + 25p - pz = 12 + 25 - 2 = 35$.
- 3e. Fem. $yu + 30p - py = 6 + 30 - 1 = 35$.

Troisiéme Solution.

Je suppose $y=2$. Donc $z=3$, & $x=6$. $u=6$. $p=1$.

Sommes.
- 1e. Fem. $xu + 10p - px = 36 + 10 - 6 = 40$.
- 2e Fem. $zu + 25p - pz = 18 + 25 - 3 = 40$.
- 3e Fem. $zu + 30p - py = 12 + 30 - 2 = 40$.

Quatriéme Solution.

Je suppose $y=3$, par conséquent $z=4$ & $x=7$. $u=6$. $p=1$.

Sommes.
- 1e Fem. $xu + 10p - px = 42 + 10 - 7 = 45$.
- 2e Fem. $zu + 25p - pz = 24 + 25 - 4 = 45$.
- 3e Fem. $yu + 30p - py = 18 + 30 - 3 = 45$.

Cinquiéme Solution.

Je ſuppoſe $y=4$. donc $z=5$. & $x=8$. $u=6$. $p=1$.

Sommes.
- 1e Fem. $xu+10p-px=48+10-8=50$.
- 2e Fem. $zu+25p-pz=30+25-5=50$.
- 3e Fem. $yu+30p-py=24+30-4=50$.

Sixiéme Solution.

Je ſuppoſe $y=5$. par conſéquent $z=6$ & $x=9$. $u=6$. $p=1$.

Sommes.
- 1e Fem. $xu+10p-px=54+10-9=55$.
- 2e Fem. $zu+25p-pz=36+25-6=55$.
- 3e Fem. $yu+30p-py=30+30-5=55$.

Septiéme Solution.

Je ſuppoſe $y=6$. donc $z=7$ & $x=10$. $u=6$. $p=1$.

Sommes.
- 1e Fem. $xu+10p-px=60+10-10=60$.
- 2e Fem. $zu+25p-pz=42+25-7=60$.
- 3e Fem. $yu+30p-py=36+30-6=60$.

On voit par cette ſolution que la premiere femme vend toutes ſes pommes dans la premiere vente.

III.

Je ne puis plus ſuppoſer une plus grande valeur à y, parce qu'il en viendroit à x une qui ſeroit plus grande que 10, c'eſt-à-dire, que la premiere femme ſeroit obligée de vendre plus de pommes qu'elle

qu'elle n'a ; ce qui est contre la supposition. D'où il suit qu'il faut chercher à u & à p une autre valeur que celle qu'on leur a donnée dans les solutions précédentes. Ainsi je fais $\frac{5p}{u-p}=2$; d'où il vient $5p=2u-2p$, ou $7p=2u$, faisant $p=2$, on aura $u=7$. Ces valeurs trouvées, on les substituera dans les comparaisons $x=z+\frac{15p}{u-p}$. $x=y+\frac{20p}{u-p}$ $z=y+\frac{5p}{u-p}$, & l'on aura ; 1°. $x=z+6$. 2°. $x=y+8$ 3°. $z=y+2$.

Huitiéme Solution:

Je suppose $y=0$, donc $z=2$ & $x=8$ (par les équations précédentes.)

$u=7.\ p=2$:

Sommes. { 1e Fem. $xu+10p-px=56+20-16=60$:
2e Fem. $zu+25p-pz=14+50-4=60$.
3e Fem. $yu+30p-py=0-60-0=60$.

L'argent, que chaque femme rapporte dans cette solution, est le même que dans la précédente : cependant ces deux solutions sont fort différentes l'une de l'autre, comme il est aisé de connoître, si l'on y fait quelque attention.

Neuviéme Solution:

Je suppose $y=1$, par conséquent $x=3$ & $x=9$: (selon les équations dernieres.)

$u=7.\ p=2$.

Sommes. { 1e Fem. $xu+10p-px=63+20-18=65$
2e Fem. $zu+25p-pz=21=50-6=65$
3e Fem. $yu+30p-py=7+60-2=65$

Cette neuviéme ſolution fait connoître que la premiere femme a vendu 9 pommes à 7 deniers dans la premiere vente, & une à 2 deniers dans la deuxiéme vente : que la ſeconde femme a vendu 3 pommes à 7 deniers dans la premiere vente, & 22 à 2 deniers dans la deuxiéme vente : que la troiſiéme femme a vendu 1 pomme à 7 deniers dans la premiere vente, & 29 à 2 deniers dans la deuxiéme vente; d'où il ſuit que chacune a rapporté 65 deniers.

Dixiéme Solution.

Je ſuppoſe enfin $y=2$. Donc $z=4$, & $x=10$: (dernieres équations.)

$u=7 \cdot p=2.$

$$\text{Sommes.}\begin{cases} 1^{e}\ \text{Fem.}\ xu+10p-px=70+20-20=70. \\ 2^{e}\ \text{Fem.}\ zu+25p-pz=28+50-8=70. \\ 3^{e}\ \text{Fem.}\ yu+30p-py=14+60-4=70. \end{cases}$$

Enfin cette derniere ſolution, montre que la premiere femme a vendu les 10 pommes à 7 deniers dans la premiere vente, mais elle n'en a point vendu dans le deuxiéme ; que la ſeconde femme a vendu 4 pommes à 7 deniers dans premiere vente, & 21 à 2 deniers dans la deuxiéme vente ; que la troiſiéme femme a vendu 2 pommes à 7 deniers dans la premiere vente, & 28 à 2 deniers dans la deuxiéme vente. D'où il ſuit que chacune a rapporté 70 deniers du marché.

Digitized by Google

QUESTION II.

Un Chef de cuisine a une certaine quantité d'œufs: Trois de ses Aides lui en demandent. Il en donne au premier la moitié de ce qu'il a, & la moitié d'un œuf; au second la moitié de ce qui lui reste & la moitié d'un œuf: enfin il donne au dernier la moitié de ce qui lui reste & la moitié d'un œuf. On demande combien ce Chef de cuisine avoit d'œufs, & comment il a pû faire pour en donner des moitiés sans en casser.

LA solution de cette question paroît impossible d'abord, à cause des moitiés d'œufs qu'il faut donner: cependant on verra bientôt que cette question a des solutions à l'infini. Pour trouver le plus petit nombre d'œufs que puisse avoir le Chef de cuisine, prenez la troisiéme puissance de 2, qui est 8, diminuez ce 8 de l'unité, & le nombre 7 sera le plus petit nombre qu'on cherche: car ce Chef de cuisine ayant donné au premier Aide quatre œufs, il lui en a donné la moitié de ce qu'il avoit, avec la moitié d'un œuf, & il lui est resté trois œufs. Ayant donné au second Aide de cuisine deux œufs, il lui a donné la moitié de ce premier reste, avec la moitié d'un œuf, & il lui est resté un œuf. Enfin ayant donné au troisiéme Aide un œuf, il lui a donné la moitié de ce deuxiéme reste, avec la moitié d'un œuf. Dans ce cas il n'est point resté d'œuf au chef de cuisine.

Si on veut de plus grands nombres que 7, il faut multiplier séparément le cube 8 par les nombres 2, 3, 4, 5, &c. selon leur suite naturelle, diminuer le produit de l'unité, & l'on aura autant

de nombres qu'on voudra à l'infini, qui satisferont à la question.

Observations.

J'ai dit qu'il falloit prendre la troisiéme puissance de 2, parce qu'il n'y a que trois Aides ; mais s'il y en avoit quatre, il faudroit prendre la quatriéme puissance, qui est 16, & la diminuer de l'unité : s'il y en avoit 5, il faudroit prendre la cinquiéme puissance de 2, qui est 32, & la diminuer de l'unité, & ainsi des autres. Pour avoir plusieurs nombres qui satisfassent à la question, il faut multiplier ces puissances par quelque nombre pris à volonté, & ôter l'unité du produit.

QUESTION III.

Une femme de la campagne a porté au marché des œufs, des fromages & des choux ; elle a vendu les œufs 2 deniers, les fromages 6 deniers, & les choux 4 deniers : elle rapporte 10 sols. Combien avoit-elle d'œufs ? Combien de fromages ? Combien de choux ?

ELle pouvoit avoir sept œufs, quinze fromages & quatre choux.

PROBLEME XXIX.

Plusieurs nombres pris suivant leur suite naturelle 1, 2, 3, 4, &c. étant disposés en rond, deviner celui que quelqu'un aura pensé.

Plan. 1. Fig. 2. ON se servira commodément des dix premieres cartes d'un jeu entier, pour exécuter ce Problême. On les disposera en rond, comme vous

voyez les dix premiers nombres dans la figure. L'As sera représenté par la lettre A jointe à 1. & le dix sera représenté par la lettre K jointe à 10.

Ayant fait toucher un nombre, ou une carte telle que voudra celui qui en aura pensé une, ajoutez au nombre de cette carte, touchée le nombre des cartes que l'on aura choisies, comme 10 dans cet exemple : puis faites compter la somme que vous aurez à celui qui a pensé la carte, par un ordre contraire à la suite naturelle des nombres, en commençant par la carte qu'il aura touchée, & en attribuant à cette carte le nombre de celle qu'il aura pensée ; car en comptant de la sorte, il finira à compter cette somme sur le nombre ou sur la carte qu'il aura pensée, & vous fera par conséquent connoître cette carte.

Comme si l'on a pensé 3 marqué par la lettre C, & qu'on ait touché 6 marqué par la lettre F, ajoutez 10 à ce nombre 6, vous aurez la somme 16 : puis faites compter * cette somme 16 depuis le nombre touché F vers E, D, C, B, A, & ainsi de suite par un ordre rétrograde ; en sorte que l'on commence à compter le nombre pensé 3 sur F, 4 sur E, 5 sur D, 6 sur C, & ainsi de suite jusqu'à 16 ; ce nombre 16 se terminera en C, & fera connoître qu'on a pensé 3, qui répond à C.

REMARQUES.

I.

On peut prendre un plus grand ou un plus petit nombre de cartes, selon qu'on le jugera à propos. S'il y avoit 15 ou 8 cartes, il faudroit ajouter 15 ou 8 nombre de la carte touchée.

* Observez qu'on ne doit pas compter cette somme tout haut, mais en soi-même, & seulement par pensée.

II.

Pour mieux couvrir l'artifice, il faut renverser les cartes, en sorte que les points soient cachés, & bien retenir la suite naturelle des cartes, & en quel endroit est le premier nombre, ou l'As, afin de sçavoir le nombre de la carte touchée, pour trouver celui jusqu'où il faut faire compter.

PROBLEME XXX.

Ayant fait prendre à trois personnes un nombre de jettons ou de cartes à certaines conditions, deviner combien chacune en aura pris.

FAites prendre au troisiéme un nombre de jettons ou de cartes, tel qu'il voudra, pourvû qu'il soit pairement pair, c'est-à-dire, divisible par 4, puis faites prendre au second autant de fois 7 que le premier aura pris de fois 4, & au premier autant de fois 13. Après cela dites au premier de donner de ses jettons aux deux autres autant qu'ils en auront chacun, & au second de donner de ses jettons aussi aux deux autres autant qu'ils en auront chacun; & enfin au troisiéme de donner aussi de ses jettons aux deux autres autant qu'ils en auront chacun: il arrivera alors qu'ils auront chacun autant de jettons l'un que l'autre, & le nombre de chacun sera double de celui que le troisiéme a pris au commencement. C'est pourquoi si vous demandez à l'une de ces trois personnes le nombre de ses jettons, la moitié de ce nombre sera le nombre des cartes ou des jettons que le troisiéme avoit au commencement; & si vous pre-

Digitized by Google

nez autant de fois 7, & autant de fois 13, qu'il y aura de fois 4 dans le nombre du troisiéme, vous aurez le nombre des cartes ou des jettons que le second & le premier avoient pris.

Comme si le troisiéme prend 8 cartes, le second en doit prendre 14; sçavoir, deux fois 7, parce que dans 8 il y a deux fois 4, & le premier en doit prendre 26; sçavoir, deux fois 13, par la même raison. Si le premier, qui a 26 cartes, en donne 14 au second, qui en a aussi 14, & 8 au premier, qui en a aussi 8, il lui en restera seulement 4, le second en aura 28, & le troisiéme 16. Mais si le second, qui a 28 cartes, en donne 4 au premier qui en a aussi 4, & 16 au troisiéme, qui en a aussi 16, il lui en restera 8, & le premier en aura 8, & le troisiéme 32. Enfin si le troisiéme, qui a 32 cartes, en donne 8 à chacun des deux autres qui en ont chacun 8, ils en auront chacun 16, qui est le double du nombre 8 des cartes que le premier a prises au commencement, &c.

1e.	2e.	3e.
26	14	8
4	28	16
8	8	32
16	16	16

PROBLEME XXXI.

De trois cartes inconnues, deviner celle que chacune des trois personnes aura prise.

IL ne faut pas que le nombre des points de chacune des trois cartes qui aura été prise, surpasse 9; & alors pour trouver ce nombre, dites à la premiere personne d'ôter 1 du double du nombre des points de sa carte, & qu'après avoir multiplié le reste par 5, elle ajoute au produit le nombre des

points de la carte que la seconde personne aura prise. Après cela faites ajouter 5 à cette somme, pour avoir une seconde somme, & ayant fait ôter 1 du double de cette seconde somme, faites multiplier le reste par 5, & ajouter au produit le nombre des points de la carte que la troisiéme personne aura prise. Enfin demandez la somme qui vient de cette derniere addition; car si vous y ajoutez 5, vous aurez une autre somme composée de trois figures, dont la premiere vers la gauche sera le nombre des points de la carte que la premiere personne aura prise, celle du milieu sera le nombre, des points de la carte de la seconde personne, & la derniere vers la droite fera connoître la carte de la troisiéme personne.

Comme si le premier a pris un 3, le second un 4, & le troisiéme un 7, en ôtant 1 du double 6 du nombre 3 des points de la carte du premier, & en multipliant le reste 5 par 5, on a 25, auquel ajoutant le nombre 4 des points de la carte du second, on a cette somme 29, à laquelle si l'on ajoute 5, on a cette seconde somme 34, dont le double est 68, d'où ôtant 1, il reste 67, qui étant multiplié par 5, donne 335, auquel ajoutant le nombre 7 des points de la carte du troisiéme, & 5 de plus, on a cette derniere somme 347, dont les trois figures représentent séparément les nombres des points de chaque carte.

Autrement.

Ayant dit au premier d'ajouter 1 au double du nombre des points de sa carte, faites multiplier la somme par 5, & ajouter au produit le nombre des points de la carte du second; puis ayant fait encore ajouter 1 au double de la somme précédente,

Digitized by Google

faites multiplier le tout par 5, & ajouter au produit le nombre des points de la carte du troisiéme. Après cela demandez la somme qui viendra de cette derniere addition, d'où vous ôterez 55, pour avoir au reste un nombre qui sera composé de trois figures, dont chacune représentera, comme auparavant, le nombre des points de chaque carte.

Comme dans le même exemple, en ajoutant 1 au double 6 du nombre 3 des points de la carte du premier; & en multipliant la somme 7 par 5, on a 35, auquel ajoutant le nombre 4 des points de la carte du second, on a 39, dont le double est 78, auquel ajoutant 1, & multipliant la somme 79 par 5, on a 365, auquel ajoûtant le nombre 7 des points de la carte du troisiéme, on a 402, d'où ôtant 55, il reste 347, dont les trois figures représentent en particulier le nombre des points de chaque carte.

PROBLEME XXXII.

Trois cartes ayant été présentées à trois personnes; deviner celle que chacun aura prise.

On doit sçavoir qu'elles cartes ont été présentées, c'est pourquoi nous appellerons l'une A, l'autre B, & la troisiéme C. Mais on laisse la liberté aux trois personnes de choisir en particulier telle carte qu'il leur plaira. Quand ce choix, qui peut se faire en six manieres différentes, sera fait, donnez à la premiere personne ce nombre 12, à la seconde ce nombre 24, & à la troisiéme ce nombre 36. Après cela dites à la premiere personne d'ajouter ensemble la moitié du nombre de celle qui a pris la carte A, le tiers du nombre de

celle qui a pris la carte B, & le quart du nombre de celle qui a pris la carte C, & demandez-lui la

1e.	2e.	3e.	Sommes.
12	24	36	
A	B	C	23
A	C	B	24
B	A	C	25
C	A	B	27
B	C	A	28
C	B	A	29

ſomme qui ſera ou 23, ou 24, ou 25 ou 27, ou 28 ou 29, comme vous voyez dans cette Table, qui montre que ſi cette ſomme eſt par exemple, la premiere perſonne aura pris la carte B, la ſeconde la carte A, & la troiſiéme la carte C: & que ſi cette ſomme eſt 28, la premiere perſonne aura pris la carte B, la deuxiéme la carte C, & la troiſiéme la carte A. Ainſi des autres.

PROBLEME XXXIII.

Deviner entre pluſieurs cartes, celle que quelqu'un aura penſé.

AYant pris à volonté dans un Jeu de cartes, un certain nombre de cartes, montrez-les par ordre ſur une table à celui qui en veut penſer une, commencez par celle de deſſous, & mettez-les proprement l'une ſur l'autre; puis dites-lui de ſe ſouvenir du nombre qui exprime la quantiéme qu'il aura penſée; ſçavoir, de 1, s'il a penſé la premiere; de 2, s'il a penſé la ſeconde; de 3, s'il a penſé la troiſiéme, &c. Mais en même-tems comptez

Digitized by Google

ſecretement celles que vous montrez, dont le nombre ſera, par exemple, 12; & ſéparez-les adroitement du reſte du Jeu. Après cela mettez ces cartes, dont vous ſçavez le nombre, dans une ſituation contraire, en commençant à mettre ſur le reſte du Jeu la carte qui aura été miſe la premiere ſur la table, & en finiſſant par celle qui aura été montrée la derniere; enfin ayant demandé le nombre de la carte penſée, que nous ſuppoſerons être la quatriéme, remettez à découvert vos cartes ſur la table l'une après l'autre, en commençant par celle de deſſus, à laquelle vous attribuerez le nombre 4 de la carte penſée, en comptant 5 ſur la ſeconde carte ſuivante, & pareillement 6 ſur la troiſiéme carte plus baſſe, & ainſi de ſuite, juſqu'à ce que vous ſoyez parvenu au nombre 12 des cartes que vous aviez priſes au commencement; car la carte, ſur laquelle tombera ce nombre 12, ſera celle qui aura été penſée.

PROBLEME XXXIV.

Pluſieurs cartes différentes étant propoſées ſucceſſivement à autant de perſonnes, pour en retenir une dans ſa mémoire, deviner celle que chacun aura penſé.

S'Il y a, par exemple, trois perſonnes, montrez trois cartes à la premiere perſonne, pour en retenir une dans ſa penſée, & mettez à part ces trois cartes. Préſentez auſſi trois autres cartes à la ſeconde perſonne, pour en penſer une à ſa volonté, & mettez auſſi à part ces trois cartes. Enfin préſentez à la troiſiéme perſonne trois autres cartes, pour lui faire penſer celle qu'il voudra,

& mettez pareillement à part ces trois dernieres cartes. Cela étant fait, disposez à découvert les trois premieres cartes en trois rangs, & mettez dessus les trois autres cartes, & dessus celles-ci les trois dernieres, pour avoir ainsi toutes les cartes disposées en trois rangs, dont chacun sera composé de trois cartes. Après quoi il faut demander à chaque personne dans quel rang est la carte qu'il a pensée: alors il sera facile de connoître cette carte, parce que la carte de la premiere personne sera la premiere de son rang; de même la carte de la seconde personne sera la seconde de son rang; enfin la carte de la troisiéme personne sera la troisiéme de son rang.

PROBLEME XXXV.

Plusieurs cartes étant disposées également en trois rangs, deviner celle que quelqu'un aura pensé.

IL est évident que le nombre des cartes doit être divisible par 3, afin qu'on en puisse faire trois rangs égaux. Supposant donc qu'il y ait, par exemple 36 cartes, dont chaque rang en comprendra par conséquent 12, demandez en quel rang est la carte qu'on aura pensé, & ayant ramassé toutes les cartes, en sorte que le rang où sera la carte pensée, soit entre les deux autres rangs; disposez de nouveau ces 36 cartes en trois rangs égaux, en mettant la premiere au premier rang, la seconde au second, la troisiéme au troisiéme, puis la quatriéme au premier rang, & pareillement la suivante au second rang, en continuant ainsi jusqu'à ce que toutes les cartes soient rangées. Après quoi vous demanderez encore dans quel rang est la car-

Digitized by Google

te pensée & ayant ramassé de nouveau toutes les cartes, ensorte que le rang où sera la carte pensée, soit aussi entre les deux autres, vous ferez, comme auparavant, trois rangs égaux des mêmes cartes. Ayant enfin demandé dans quel rang est la carte pensée, vous connoîtrez aisément cette carte, parce qu'elle se trouvera au milieu de son rang; sçavoir, dans cet exemple, la sixiéme. Ou bien, pour mieux cacher l'artifice, elle se trouvera au milieu de toutes les cartes, ou la dix-huitiéme, lorsqu'on les aura ramassées comme auparavant; mais il faut faire en sorte que le rang, où sera la carte pensée, soit toujours entre les deux autres.

PROBLEME XXXVI.

Deviner combien il y a de points dans une carte que quelqu'un aura tirée d'un Jeu de carte.

AYant pris un jeu entier de 52 cartes, présentez-le à quelqu'un de la compagnie, qui tirera celle qu'il lui plaira, sans vous la montrer. Ensuite faisant valoir toutes les cartes selon leur valeur marquée, vous ferez valoir le Valet 11, la Dame 12, & le Roy 13; puis comptant les points de toutes les cartes, vous ajouterez les points de la premiere carte aux points de la seconde, ceux-ci aux points de la troisiéme, & ainsi de suite, vous rejetterez tous les 13, & garderez le reste pour l'ajouter à la carte suivante. On voit qu'il est inutile de compter les Rois qui valent 13. Enfin s'il reste quelques points à la derniere carte, vous ôterez ces points de 13, & le reste marquera les points de la carte qu'on aura tirée: en sorte que si le reste est 11, ce sera un Valet qu'on aura tiré; si

le reste est 12, ce sera une Dame, &c. mais s'il ne reste rien, on aura tiré un Roy. Vous connoîtrez quel est ce Roi, en regardant celui qui manque dans les cartes que vous avez.

Si l'on veut se servir d'un Jeu composé seulement de 32 cartes, dont on se sert à présent pour jouer au Piquet, on ajoutera tous les points des cartes, comme on vient de dire; mais on rejettera tous les 10 qui se trouveront en faisant cette addition. Enfin on ajoutera 4 aux points de la derniere carte pour avoir une somme, laquelle étant ôtée de 10, si elle est moindre, ou de 20, si elle surpasse 10, le reste sera le nombre de la carte qu'on aura tirée, de sorte que s'il reste 2 ce sera un Valet; s'il reste 3, ce sera une Dame, & si le reste est 4, on aura tiré un Roy, &c.

Si le Jeu de cartes est imparfait, on doit prendre garde aux cartes qui manquent, & ajouter à la derniere somme le nombre des points de toutes ces cartes qui manquent; après qu'on aura ôté de ce nombre autant de fois 10 qu'il sera possible: & la somme, qui viendra de cette addition, doit être, comme auparavant, ôtée de 10, ou de 20, selon qu'elle sera au-dessous, ou au-dessus de 10. Il est évident que si l'on regarde encore une fois les cartes, on pourra nommer celle qui aura été tirée.

PROBLEME XXXVII.

Deviner le nombre de tous les points qui sont en deux cartes qu'on aura tirées d'un Jeu de cartes entier.

DItes à celui qui aura tiré à l'avanture deux cartes du Jeu composé de 52 cartes, d'a-

jouter à chacune de ses cartes autant d'autres cartes que le nombre de ses points sera au-dessous de 25, qui est la moitié de toutes les cartes, diminué de l'unité, en donnant à chaque carte figurée tel nombre qu'on voudra. Comme si la premiere carte est un Dix, on y ajoutera 15 cartes, & si la seconde carte est un sept, on y ajoutera 18 cartes; ce qui fera en tout 35 cartes: de sorte que dans cet exemple il restera 17 cartes de tout le Jeu. Prenant donc les cartes qui restent du Jeu, & trouvant qu'il en reste 17, ce nombre 17 sera le nombre de tous les points pris ensemble des deux cartes qu'on aura tirées.

Pour mieux cacher l'artifice, il ne faut point toucher aux cartes; mais il faut faire ôter le nombre des points de chacune des deux cartes qui ont été prises de 26, qui est la moitié du nombre de toutes les cartes, & faire ajouter ensemble les deux restes, pour avoir leur somme, que vous devez demander, afin de l'ôter du nombre de toutes les cartes, c'est-à-dire de 52; car le nombre, qui restera, sera celui qu'on cherche.

Comme dans cet exemple, où l'on suppose qu'on a pris un dix & un sept, en ôtant 10 de 26, il reste 16, & en ôtant 7 de 26, il reste 19, & en ajoutant ensemble les deux restes 16, 19, on a 35 pour leur somme, laquelle étant ôtée de 52, il reste 17 pour le nombre des points des deux cartes qu'on a tirées.

On fera la même chose avec un Jeu de Piquet, composé de 36 cartes, ou seulement de 32 cartes.

Mais pour cacher encore mieux l'artifice, au lieu de la moitié 26 de toutes les cartes, quand il y en a 52, prenez un autre nombre moindre, mais plus grand que 10, comme 24, duquel ôtant 10 &

8, il reste 14 & 17, dont la somme 31 étant ôtée de la somme 52 de toutes les cartes, il reste 21, d'où vous ôterez encore 4, qui est le double de l'excès de 26 sur 24, pour avoir au reste 17 le nombre des points des deux cartes qu'on a tirées, sçavoir, du dix & du sept.

Quand on se servira d'un Jeu de Piquet, composé de 36 cartes, au lieu de la moitié 18 du nombre 36 de toutes les cartes, on prendra pareillement un nombre moindre, comme 16, duquel ôtant 10 & 7, il reste 6 & 9, dont la somme 15 étant ôtée du nombre 36 de toutes les cartes, il reste 21, d'où vous ôterez encore 4, qui est le double de l'excès de 18 sur 16, pour avoir au reste 17 le nombre des points des deux cartes qui ont été tirées.

Pareillement, si le Jeu de Piquet n'est que de 32 cartes, au lieu de la moitié 16 du nombre 32 de toutes les cartes, on prendra un nombre moindre tel que l'on voudra, pourvû qu'il soit plus grand que 10, comme 14, duquel ôtant 10 & 7, il reste 4 & 7, dont la somme 11 étant ôtée de 32, il reste 21, d'où il faut encore ôter 4, qui est le double de l'excès de 16 sur 14, pour avoir au reste 17 le nombre des points du dix & du sept qu'on a tiré.

PROBLEME XXXVIII.

Deviner le nombre de tous les points qui sont en trois cartes, qu'on aura tirées à volonté d'un Jeu de cartes.

I.

POur résoudre ce Problême comme le précédent, en suivant la voye la plus courte, il faut que le nombre des cartes dont le Jeu est composé, soit

ſoit diviſible par 3 ; ainſi le Jeu de 52 cartes, & celui de 32 cartes ne ſont pas ſi convenables : celui de 36 cartes convient mieux, parce que 36 a pour troiſiéme partie 12, qui nous ſervira pour réſoudre la Queſtion en cette ſorte.

Dites à celui, qui aura tiré à volonté trois cartes d'un Jeu de Piquet, composé de 36 cartes, d'ajouter à chacune de ces cartes autant d'autres cartes que le nombre de ſes points ſera au-deſſous de 11, qui eſt le tiers du nombre de toutes les cartes diminué de l'unité, en donnant, comme dans le Problême précédent, à chaque carte figurée tel nombre qu'on voudra. Comme ſi la premiere carte eſt un neuf, on y ajoutera 2 cartes; ſi la ſeconde carte eſt un ſept, on y ajoutera 4 cartes, & ſi la troiſiéme carte eſt un ſix, on y ajoutera 5 cartes, ce qui fait en tout 14 cartes qu'on a tiré du jeu ; de ſorte que dans cet exemple il reſtera 22 cartes de tout le Jeu. Prenant donc les cartes qui reſtent du Jeu, & trouvant qu'il en reſte 22, ce nombre 22 ſera connoître le nombre de tous les points des trois cartes qu'on aura tirées.

Ou bien ſans toucher aux cartes, & pour mieux cacher l'artifice, faites ôter de 12, qui eſt le tiers du nombre 36 de toutes les cartes, le nombre des points de chacune des trois cartes qu'on a priſes, & faites ajouter enſemble les trois reſtes, pour avoir leur ſomme, que vous devez demander, afin de l'ôter du nombre de toutes les cartes, c'eſt-à-dire, de 36 ; car le nombre, qui reſtera, ſera celui qu'on cherche.

Comme dans cet exemple, où l'on a ſuppoſé qu'on a pris un neuf, un ſept & un ſix, ôtant 9 de 12, il reſte 3; ôtant 7 de 12, il reſte 5 ; enfin ôtant 6 de 12, il reſte 6, & ajoutant enſemble les

trois restes 3, 5, 6, on a 14 pour leur somme, laquelle étant ôtée de 36, il reste 22 pour le nombre des points des trois cartes qui ont été tirées.

II.

Pour mieux encore cacher l'artifice, & pour appliquer la regle à un Jeu de plus ou de moins de 36 cartes, comme de 52 cartes, servez-vous d'un nombre plus grand que 10, & moindre que 17, tiers de 52, par exemple de 15: & dites à celui, qui aura tiré les trois cartes, d'ajouter à chacune de ses cartes autant d'autres cartes que le nombre de ses points sera au-dessous de 15, comme si la premiere carte est un neuf, on y ajoutera 6 cartes, si la seconde carte est un sept, on y ajoutera 8 cartes, & si la troisiéme carte est un six, on y ajoutera 9 cartes, ce qui fera en tout 26 cartes; de sorte que dans cet exemple il restera de tout le jeu 26 cartes. Prenant donc les cartes qui restent du Jeu, & trouvant qu'il en reste 26, ôtez de 26 le nombre 4, qui est l'excès de 52 nombre de toutes les cartes sur le triple de 15, augmenté de 3, c'est-à-dire, sur 48, & le reste 22 sera le nombre de tous les points des trois cartes qui auront été tirées du Jeu.

Ou bien sans toucher aux cartes, faites ôter le nombre des points de chacune des trois cartes qui auront été prises de 16, qui surpasse de l'unité le premier nombre 15, & faites ajouter ensemble tous les restes, pour avoir leur somme, que vous devez demander, afin de l'ôter du nombre précédent 48; car le reste sera le nombre de tous les points des trois cartes qu'on aura prises.

Comme dans cet exemple, où l'on suppose qu'on a pris un neuf, un sept & un six, en ôtant 9 de 16, il reste 7; ôtant 7 de 16, il reste 9; en-

Digitized by Google

fin ôtant 6 de 16, il reſte 10, & ajoutant enſemble les trois reſtes 7, 9, 10, on a 26 pour leur ſomme, laquelle étant ôtée de 48, il reſte 22 pour le nombre des points des trois cartes qui ont été priſes.

Mais ſi vous voulez vous ſervir d'un Jeu compoſé de 36 cartes, & prendre un nombre plus grand que 10, comme 15, après avoir ajouté les cartes, qui ſeront au nombre de 26, comme vous avez vû, ôtez 26 de 36, nombre de toutes les cartes, ajoutez au reſte 10 ce nombre 12, qui eſt l'excès du triple de 15, augmenté de 3, c'eſt-à-dire, de 48 ſur le nombre 36 de toutes les cartes, & la ſomme 22 ſera le nombre des points qu'on cherche. Au lieu de 12, il faut ajouter 16, pour un Jeu de Piquet de 32 cartes, parce qu'ôtant 32 de 48, il reſte 16.

III.

A l'imitation de ce Problême & du précédent; il ſera aiſé de réſoudre la Queſtion pour quatre cartes qu'on aura tirées, & pour un plus grand nombre.

REMARQUES.

De quelque maniere qu'on exécute ce Problême, ſoit avec un Jeu entier de cartes, ou avec un Jeu qui ne ſoit point entier, ſoit qu'on tire du Jeu trois cartes ou davantage, ſoit enfin qu'après avoir tiré du Jeu un certain nombre de cartes, on faſſe accomplir 15, ou quelqu'autre nombre, comme 14, 13, 16, &c. ſelon ce qui a été dit dans l'article II. Voici la regle générale qu'on doit ſuivre.

Multipliez le nombre que vous faites accomplir par le nombre des cartes choiſies; ajoutez au

produit ce même nombre des cartes choisies, & ôtez cette somme du nombre des cartes du Jeu dont on se sera servi, comme de 52, si le Jeu est entier, ou de 36, s'il n'est point entier, &c. le reste sera le nombre qu'il faudra ôter des cartes qui seront restées de tout le Jeu. Le nombre des cartes restées après cette derniere soustraction exprimera le nombre des points des cartes choisies.

Exemple.

Supposé qu'on ait choisi dans un Jeu entier 4 cartes, dont les points soient 3, 5, 7, 10, & qu'on ait fait accomplir les points de chacune jusqu'à 11, il faut multiplier 11 par 4, nombre des cartes choisies, & ajouter au produit 44 le même nombre 4; la somme sera 48, que vous ôterez de 52, nombre des cartes du Jeu entier, il restera 4, qu'il faudra ôter de 29, nombre des cartes qui seront restées du Jeu, après que celui qui aura choisi les quatre cartes en aura tiré 8, pour accomplir 11 avec les 3 points de la premiere carte, 6 pour accomplir 11 avec les 5 points de la seconde carte, 4 pour accomplir 11 avec les 7 points de la troisiéme carte, & 1 pour accomplir 11 avec les 10 points de la quatriéme: toutes ces cartes 8, 6, 4, 1, avec les 4 choisies, font 23, qui, étant ôtés de 52, donnent pour reste 29. Ayant donc ôté 4 de 29, le reste 25, marquera la somme des points des quatre cartes choisies, 3, 5, 7, 10.

Si après avoir ôté du nombre des cartes du Jeu proposé la somme composée du nombre des cartes choisies, & du produit de ce même nombre des cartes choisies par le nombre qu'on a fait accomplir, il ne reste rien, le nombre des cartes restées

de tout le Jeu exprimera le nombre des points des cartes choisies.

Exemple.

Qu'on ait choisi dans un Jeu entier trois cartes, dont les points soient 1, 3, 4, 7, & qu'on les ait fait accomplir jusqu'à 12, il faut multiplier 12 par 4 nombre des cartes choisies, & ajouter au produit 48 le même nombre 4 : la somme sera 52 égale au nombre des cartes du Jeu entier. Comme il ne reste rien, c'est une marque que le nombre des points des cartes choisies sera exprimé par le nombre des cartes restantes, qui est 15. Car pour accomplir 12 avec 1 point de la premiere carte, il faut 11 cartes; pour accomplir 12 avec les trois points de la seconde carte, il faut 9 cartes; pour accomplir 12 avec les 4 points de la troisiéme carte, il faut 8 cartes: enfin pour accomplir 12 avec les 7 points de la quatriéme carte, il faut 5 cartes. Toutes ces cartes 11, 9, 8, 5, avec les 4 choisies, font 37, qui étant ôté de 52, donnent pour reste 15, nombre des points des cartes choisies, 1, 3, 4, 7.

Si la somme composée du nombre des cartes choisies, & du produit de ce même nombre par le nombre qu'on a fait accomplir, se trouve plus grande que le nombre des cartes du Jeu proposé, alors il faut soustraire de cette somme le nombre des cartes du Jeu proposé, & le reste sera un nombre qu'il faudra ajouter au nombre des cartes restées, pour avoir le nombre des points des cartes choisies.

Exemple.

Si l'on avoit choisi dans un Jeu de trente-six cartes 3 cartes, dont les points fussent 4, 7, 9 à

& qu'on se propose d'accomplir ces points jusqu'à 15 avec le nombre des cartes qu'on auroit tiré du Jeu, il faudroit multiplier 15, nombre qu'on a fait accomplir, par 3 nombre des cartes choisies, le produit est 45, auquel on ajoutera 3, nombre des cartes choisies. La somme 48 est plus grande que 36, nombre des cartes du Jeu proposé : il faut donc ôter 36 de 48, le reste 12 doit être ajouté au nombre des cartes restées, qui est 8 ; car on a dû tirer du Jeu proposé 11 cartes, pour accomplir 15 avec les 4 points de la premiere carte, 8 pour accomplir 15 avec les 7 points de la deuxiéme carte, & 6 pour accomplir 15 avec les neuf points de la troisiéme carte : toutes ces cartes 11, 8, 6, avec les 3 choisies, font 28, qui étant ôtés de 36 nombre des cartes du Jeu proposé, donnent pour reste 8. Ayant donc ajouté ces 8 cartes avec les 12, différence de 48, somme trouvée, à 36 nombre des cartes du Jeu proposé, ou aura 20 pour le nombre des points des cartes choisies 4, 7, 9.

Il faut observer 1o. qu'on peut faire accomplir tel nombre qu'on voudra, en comptant les points de chaque carte jusqu'à ce nombre : il n'est pas même nécessaire de faire accomplir le même nombre avec les points des cartes choisies. Par exemple, on peut, avec les points des trois cartes choisies, faire accomplir trois différens nombres, comme 13, 14, 15 ; alors on ajoutera ensemble ces trois nombres, que l'on augmentera de 3 nombres des cartes choisies, & l'on achevera le reste comme on a dit.

Il faut 2o. prendre garde qu'il peut arriver que la somme des nombres qui vient, lorsqu'on a fait accomplir, est si grande qu'il n'y aura point assez de cartes dans le Jeu proposé pour les en tirer.

Digitized by Google

Néanmoins on résoudra le Problême, si on sçait de combien le nombre des cartes qu'on devroit retirer surpasse celui des cartes du Jeu proposé. Par exemple, si le nombre des cartes du Jeu proposé étoit 36, qu'on eut fait accomplir 15, & que les trois cartes choisies fussent 2, 3, 4, il est certain qu'on ne pourroit pas retirer de 26 toutes les cartes, lorsqu'on auroit fait accomplir 15 avec tous les points de chacune des cartes; car il faudroit prendre 13 cartes pour accomplir 15 avec 2 points de la premiere carte, 12 pour la seconde, & 11 pour la troisiéme; mais ces trois nombres 13, 12, 11, avec 3, nombre des cartes choisies, font 39, qui est plus grand que 36. Il faudra donc sçavoir que 39 surpasse 36 de 3: alors on ôtera ces excès 3 de 12, autre excès de 36, nombre des cartes du Jeu proposé a 48 somme de 3, nombre des cartes choisies, & du produit de ce même nombre 3 par 15, nombre qu'on a fait accomplir; & le reste 9 est le nombre des points des trois cartes choisies 2, 3, 4. Consultez Bachet dans ses *Problêmes plaisans & delectables*, où vous trouverez des démonstrations de plusieurs Problêmes qu'on propose dans ces Problêmes d'Arithmétique.

PROBLEME XXXIX.

De 16 jettons, deviner celui que quelqu'un aura pensé.

IL faut disposer ces jettons en deux rangs, en sorte qu'il y en ait 8 en l'un & 8 en l'autre, comme on le voit dans la figure suivante. Ensuite il faut demander à celui qui aura pensé un jetton dans quel rang il est. S'il répond qu'il est dans le

rang A, levez les jettons de la rangée A, & disposez-les en deux rangées; dont l'une contiendra 4 jettons, & la seconde 4 autres, comme vous voyez en C & D, ayant laissé la rangée B sans y toucher. Demandez encore en quel rang est le jetton pensé. Si on dit qu'il est dans le rang C, levez le rang C & le rang D, de maniere que les

A	B	C	B	D	E	B	F	H	B	I
o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	*o*
o	o	o	o	o	*o*	o	o	o	o	o
o	o	*o*	o	o	o	o	o	o	o	o
o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o
o	o		o			o			o	
o	o		o			o			o	
o	o		o			o			o	
o	o		o			o			o	

jettons d'un rang ne soient point confondus avec les jettons de l'autre rang, & faites-en deux autres rangs, comme vous voyez en E & F; mais en les rangeant, faites que les jettons du rang C soient posés de côté & d'autre du rang B, en sorte que le premier du rang C soit le premier du rang E, le second du rang C, soit le premier du rang F, & le troisiéme du rang C, soit le second du rang E, puis le quatriéme du rang C, soit le second du rang F, &c. Demandez encore en quel rang se trouve le jetton pensé; & si on vous dit qu'il est dans le rang E, levez encore les jettons comme on vient de le dire & disposez-les de la même façon. Demandez enfin en quel rang est le jetton pensé: il doit occuper la premiere place du rang où l'on aura dit qu'il se trouve: comme dans cette figure où le jetton italique est le premier de son rang.

Digitized by Google

REMARQUE.

Il ſeroit plus aiſé d'exercer ce Problême avec des cartes, & on couvriroit davantage l'artifice, en battant les cartes, après avoir reconnu celle qui aura été penſée, & en les comptant pour la découvrir.

PROBLEME XL.

Du Jeu de l'Anneau.

CE Jeu ſe peut pratiquer agréablement dans une compagnie composée de pluſieurs perſonnes, dont le nombre ne doit pas être plus grand que 9, afin d'y pouvoir plus facilement appliquer le Problême XXI.* On fera valoir 1 la premiere perſonne, 2 la ſeconde, 3 la troiſiéme, & ainſi de ſuite. On fera auſſi valoir 1 la main droite, & 2 la main gauche. On donnera pareillement 1 au premier doigt d'une main, 2 au ſecond, 3 au troiſiéme, 4 au quatriéme, 5 au cinquiéme. Enfin on donnera 1 à la premiere jointure, 2 à la ſeconde, & 3 à la troiſiéme. Cela étant imaginé, ſi l'on fait mettre à l'une de ces perſonnes, par exemple, à la cinquiéme, un Anneau à la premiere jointure du quatriéme doigt de ſa main gauche, il eſt évident que pour deviner la perſonne qui aura pris cet Anneau ou Bague, & dire en quelle main, en quel doigt & en quelle jointure il eſt, il n'y a qu'à deviner ces quatre nombres 5, 1, 4, 2, le premier 5 repréſentant la cinquiéme perſonne, le ſecond 1 la premiere jointure, le troiſiéme 4 le quatriéme doigt, & le quatriéme 2 la main gauche. Ce qui ſe fera en ſuivant la derniere méthode du Problême XXI.* comme vous allez voir.

* Pag. 163. Art. IV.

Digitized by Google

Otant 1 de 10 double du premier nombre 5; & multipliant le reſte 9 par 5, on a 45, auquel ajoutant le ſecond nombre 1, on a cette ſomme 46, à laquelle ſi on ajoute 5, on a cette ſeconde ſomme 51, dont le double eſt 102, d'où ôtant 1, il reſte 101, qui étant multiplié par 5, produit 505, auquel ajoutant le troiſiéme nombre 4, on a cette ſomme 509, à laquelle ajoutant encore 5, on a cette ſeconde ſomme 514, dont le double 1028 étant diminué de 1, & le reſte 1027 étant multiplié par 5, produit 5135, auquel ajoutant le quatriéme nombre 2, on a cette ſomme 5137, à laquelle ajoutant 5, on a cette ſeconde ſomme 5142, dont les quatre figures repréſentent les quatre nombres qu'on cherche, & font connoître par conſéquent que l'Anneau eſt dans la premiere jointure du quatriéme doigt de la main gauche de la cinquiéme perſonne.

Autre maniere.

On prendra pour premiere perſonne, celle qui eſt le plus à main gauche, comme cela ſe fait ordinairement; pour la ſeconde celle qui eſt après, pour troiſiéme celle qui eſt enſuite, & ainſi des autres. On ne fera point d'autre diſtinction entre les deux mains, que d'obſerver le même ordre en comptant pour premier doigt le petit doigt de la main droite, & pour le dixiéme le petit doigt de la main gauche, ou d'une autre façon, ſuivant qu'on le trouvera plus commode. Enfin on diſtinguera par ordre les trois jointures de chaque doigt en commençant par celle qui eſt la plus proche de la racine du doigt, ou par celle qui eſt la plus proche du bout du doigt. Cependant comme il ſemble qu'il n'y a que deux jointures au pouce, il ſeroit

Digitized by Google

peut-être plus à propos de compter ces jointures par celle qui eſt la plus près de l'extrêmité du doigt, & d'avertir qu'on commencera à compter par celle-là.

Cela étant ſuppoſé, dites que l'on double le nombre qui convient à la perſonne qui a la Bague, & que l'on ajoute 5 à ce double ; dites enſuite qu'on multiplie le tout par 5, & que l'on ajoute à ce produit le nombre qui convient au doigt : cela étant fait, dites encore que l'on multiplie cette ſomme par 10, & que l'on ajoute au produit le nombre qui convient à la jointure où eſt la Bague. Demandez enfin la ſomme de ces nombres.

Si vous ôtez ſecretement de cette ſomme le nombre 250, le reſte exprimera par les centaines le nombre de la perſonne qui a la Bague, par les dixaines le quantiéme des doigts, & par les unités la jointure du doigt.

Exemple.

Je ſuppoſe que la ſeptiéme perſonne de la compagnie ait la Bague au neuviéme doigt, c'eſt-à-dire, au doigt annulaire de la main gauche, & à la deuxiéme jointure de ce doigt. Faites doubler 7, le double ſera 14, auquel vous ferez ajouter 5, la ſomme ſera 19 : faites multiplier ces 19 par 5, le produit ſera 95 auſquels faiſant ajouter le nombre 9 qui convient au doigt, il viendra 104. Faites multiplier ce nombre 104 par 10, on aura pour produit 1040, auſquels faiſant ajouter 2, qui convient à la jointure, la ſomme ſera 1042 ; vous demanderez cette ſomme, & quand vous la ſçaurez, vous en ôterez ſecretement 250, il reſtera 792, dont le 7 exprimera la ſeptiéme perſonne qui a la Bague, le 9 marquera que c'eſt au neuviéme doigt, & le 2 fera voir que c'eſt à la deuxiéme jointure.

REMARQUE.

S'il y avoit un zero au rang des dixaines, ce seroit une marque que la Bague se trouveroit au dixiéme doigt : alors il faudroit ôter 1 du nombre des centaines, & le reste marqueroit le nombre qui convient à la personne qui auroit la Bague.

PROBLEME XLI.

Plusieurs cartes étant disposées en divers rangs, deviner celle que quelqu'un aura pensé.

On prend ordinairement quinze cartes, que l'on dispose en trois rangs, de maniere qu'il y en ait cinq en chaque rang. 1°. Les cartes étant ainsi rangées, & ayant demandé à celui qui en aura pensé une, en quel rang elle se trouve; ramassez chaque rang, & assemblez-les en mettant dans le milieu celui où se trouvera la carte pensée. 2°. Disposez encore toutes les cartes en trois rangs, mettant la premiere, c'est-à-dire, celle de dessus, au premier rang, la suivante au second rang, la troisiéme au troisiéme rang, la quatriéme au premier rang, la cinquiéme au second rang, & les autres de la même maniere, jusqu'à ce qu'elles soient toutes rangées. Puis ayant encore demandé en quel rang est la carte pensée vous ramasserez, comme auparavant, chaque rang, & les rassemblerez, en mettant au milieu celui où se trouve la carte pensée. 3°. Vous rangerez encore les cartes de la même maniere qu'on vient de faire, & ayant demandé en quel rang se trouve la carte pensée, vous serez assuré qu'elle sera la troisiéme de ce même rang. 4°. Ayant reconnu la carte pensée, vous pou-

Digitized by Google

vèz ramaſſer les rangs, en mettant encore au milieu celui où eſt la carte penſée; pour lors elle ſe trouvera au milieu des quinze cartes, & de quelque côté que l'on commence à compter, elle ſe trouvera la huitiéme. On peut auſſi, après avoir reconnu la carte penſée, mêler les cartes, & montrer la carte penſée, en les découvrant l'une après l'autre.

REMARQUES.

On peut faire ce même Jeu avec un autre nombre de cartes, & en pluſieurs façons différentes. On prendra, par exemple, ſeize cartes, que l'on diſpoſera en quatre rangs, à chaque rang on mettra quatre cartes. Après avoir ſçû en quel rang eſt la carte penſée, on levera les rangs; on retiendra dans ſa mémoire celui où eſt la carte penſée, & on rangera les cartes de la maniere qu'on l'a dit, enſorte que les cartes des rangs précédens ſe ſépareront, & que chacune ſe trouvera dans un autre rang: je veux dire que la premiere, ou celle de deſſus les cartes levées, ſe trouvera au premier rang, la ſuivante ſe trouvera au ſecond rang, la troiſiéme au troiſiéme rang, & la quatriéme au quatriéme rang. Ainſi les quatre cartes, qui étoient enſemble dans la diſpoſition précédente, ſe trouveront dans les quatre rangs dans cette ſeconde diſpoſition. Par conſéquent, ſi l'on avoit mis le rang où ſe trouvoit la carte penſée au-deſſus des autres, on ſeroit aſſuré que cette carte eſt la premiere dans l'un des rangs de cette ſeconde diſpoſition. Il ſera donc très-aiſé de la deviner, quand on aura demandé en quel rang elle ſe trouve dans cette ſeconde diſpoſition, puiſqu'elle eſt infailliblement la premiere.

Mais si le rang, où se trouvoit la carte dans la premiere disposition, avoit été mis au-dessous du premier des rangs levés, cette même carte se trouveroit la seconde dans l'un des rangs de la deuxiéme disposition. On juge bien qu'elle se trouveroit la troisiéme dans la seconde disposition, si le rang où elle se trouvoit en premier lieu, avoit été mis dans la troisiéme place des rangs levés, & qu'elle se trouveroit la quatriéme de l'un des rangs de la seconde disposition, si ce rang levé avoit été mis à la quatriéme place des rangs levés.

RROBLEME XLII.

Ayant un Vase rempli de huit pintes de quelque liqueur, en mettre justement la moitié dans un autre Vase de cinq pintes, par le moyen d'un troisiéme Vase contenant trois pintes.

ON propose ordinairement cette Question de la sorte : Quelqu'un ayant une Bouteille pleine de 8 pintes d'excellent vin, en veut faire présent de la moitié, ou de quatre pintes à un de ses amis : mais pour la mesurer il n'a que deux autres Bouteilles, dont l'une contient 5 pintes, & l'autre 3. On demande comment il doit faire pour mettre quatre pintes dans la Bouteille qui en contient cinq.

Pour le sçavoir, appellons A la Bouteille de 8 pintes, B celle de 5, & C celle de 3, en supposant qu'il y a 8 pintes de vin dans la Bouteille A, & que les deux autres B, C, soient vuides, comme vous voyez en D. Ayant rempli la Bouteille B du vin de la Bouteille A, où il ne restera plus que 3 pintes, comme vous voyez en E, remplissez

la Bouteille C du vin de la Bouteille B, où par conſéquent il ne reſtera plus que 2 pintes, comme vous voyez en F. Après cela verſez le vin de la Bouteille C dans la Bouteille A, où par conſéquent il il y aura 6 pintes, comme vous voyez en G, & verſez les 2 pintes de la Bouteille B dans la Bouteille C, où il y aura 2 pintes, comme vous voyez en H. Enfin ayant rempli la Bouteille B du vin de la Bouteille A, où il reſtera ſeulement 1 pinte, comme vous voyez en I; achevez de remplir la Bouteille C du vin de la Bouille B, où il reſtera 4 pintes, comme vous voyez en K, & ainſi la Queſtion ſe trouvera réſolue.

	8.	5.	3.
	A.	B.	C.
D.	8.	0.	0.
E.	3.	5.	0.
F.	3.	2.	3.
G.	6.	2.	0.
H.	6.	0.	2.
I.	1.	5.	2.
K.	1.	4.	3.

REMARQUE.

Si au lieu de faire reſter les quatre pintes de vin dans la Bouteille B, vous voulez qu'elles reſtent dans la Bouteille A, que nous avons ſuppoſée remplie de huit pintes, rempliſſez la Bouteille C du vin qui eſt dans la Bouteille A, où alors il ne reſtera plus que 5 pintes, comme vous voyez en D, & verſez les trois pintes de la Bouteille C, dans la Bouteille B, où il y aura par conſéquent 3 pintes de vin, comme vous voyez en E. Puis ayant rempli la Bouteille C du vin de la Bouteille A, où il ne reſtera

	8.	5.	3.
	A.	B.	C.
	8.	0.	0.
D.	5.	0.	3.
E.	5.	3.	0.
F.	2.	3.	3.
G.	2.	5.	1.
H.	7.	0.	1.
I.	7.	1.	0.
K.	4.	1.	3.

plus que 2 pintes, comme vous voyez en F, achevez de remplir la Bouteille B du vin qui est dans la Bouteille C, où il ne restera plus qu'une pinte, comme vous voyez en G. Enfin ayant versé le vin de la Bouteille B dans la Bouteille A, où il se trouvera 7 pintes, comme vous voyez en H, versez la pinte de vin, qui est en C, dans la Bouteille B, où il y aura par conséquent une pinte, comme vous voyez en I, & remplissez la Bouteille C du vin de la Bouteille A, où il ne restera que 4 pintes, comme il étoit proposé, & comme vous voyez en K.

PROBLEME XLIII.

Une personne a une Bouteille de douze pintes pleine de vin : il en veut donner six pintes au Frere Quêteur ; il n'a pour les mesurer que deux autres Bouteilles, l'une de sept pintes, & l'autre de cinq. Que doit il faire pour avoir les six pintes dans la Bouteille de sept pintes ?

CE Problême est la même chose que le précédent, on l'exécutera aussi de la même maniere. Soit nommé D la Bouteille de douze pintes, S celle de sept pintes, & C celle de cinq pintes. La Bouteille D est pleine, & les deux autres S, C, sont vuides, comme on voit en G. Remplissez la Bouteille C, du vin qui est en D, & la Bouteille D ne contiendra plus que 7 pintes, comme on voit en H. Puis versez dans S le vin que contient la Bouteille C, qui demeurera vuide, & la Bouteille S contiendra 5 pintes, comme on voit en I. Ensuite ayant rempli C avec le vin qui est en D, la Bouteille D ne contiendra plus que 2 pintes, la Bouteille

Bouteille S en contiendra 5, & la bouteille C ſera pleine, comme on voit en K : après cela verſez de la Bouteille C du vin dans la Bouteille S pour la remplir, & la Bouteille D ne contiendra encore que deux pintes, la Bouteille S en contiendra ſept, & la Bouteille C n'en contiendra plus que trois, comme on voit en L. Cela étant fait, vuidez S en D, & C en S, & il y aura neuf pintes en D, trois pintes en S, & C ſera vuide, comme on le voit en M. Enſuite rempliſſez C de la Bouteille D, & de C verſez en S pour la remplir ; alors il y aura quatre pintes en D, ſept pintes en S, & une pinte en C ; comme vous voyez en N. Cela fait, remettez les ſept pintes de S dans D, & la pinte de C dans S, & C contiendra onze pintes, S en contiendra une, & C ſera vuide, comme on le voit en P. Enfin ayant rempli de la Bouteille D la Bouteille C, qui contient cinq pintes ; & ayant verſé ces cinq pintes de C dans la Bouteille S, qui en contient déja une, on trouvera que D contient ſix pintes, & que S en contient auſſi ſix ; ainſi on eſt parvenu à ce qu'on ſouhaitoit.

	12.	.	5.
	D.	S.	C.
G.	12.	0.	0.
H.	7.	0.	5.
I.	7.	5.	0.
K.	2.	5.	5.
L.	2.	7.	3.
M.	9.	3.	0.
N.	4.	7.	1.
P.	11.	1.	0.
Q.	6.	6.	0.

PROBLEME XLIV.

Partager à trois personnes vingt-un tonneaux, dont il y en a sept vuides, sept pleins, & sept demi pleins; de telle maniere que ces trois personnes ayent autant de tonneaux & de vin l'une que l'autre.

CEtte Question peut être résolue en deux manieres. On voit d'abord que chacune de ces personnes doit avoir sept tonneaux. On peut partager 7 en 3 parties, 2, 2, 3, qui prises ensemble font 7. ces trois nombres servent à la premiere solution de la Question.

Premiere Solution.

Le premier de ces nombres 2 doit être appliqué à la premiere personne, qui prendra 2 tonneaux pleins, 2 tonneaux vuides, & par conséquent 3 à moitié pleins, pour en avoir 7. Le second nombre 2 s'appliquera à la deuxiéme personne, qui prendra, comme la premiere, 2 tonneaux pleins, 2 vuides, & 3 demi-pleins. Enfin le troisiéme nombre 3 s'appliquera à la troisiéme personne, qui prendra 3 tonneaux pleins, 3 tonneaux vuides, & 1 tonneau demi plein, pour en avoir 7. De cette maniere, ces trois personnes auront autant de tonneaux & de vin l'une que l'autre.

	pleins.	vuides.	½ pleins.
1e. Pers.	2	2	3
2e. Pers.	2	2	3
3e. Pers.	3	3	1

Le même nombre 7 peut être encore partagé en 3 autres parties, 3, 3, 1, qui prises ensemble font 7. Ces trois nombres servent à la deuxiéme solution de la question.

Deuxiéme Solution.

Le premier de ces nombres 3 s'appliquera à la premiere personne, qui prendra 3 tonneaux pleins, 3 vuides, & 1 à moitié plein, pour en avoir sept. Le deuxiéme nombre 3 s'appliquera à la seconde

	pleins.	*vuides.*	$\frac{1}{2}$ *pleins.*
1e. Pers.	3	3	1
2e. Pers.	3	3	1
3e. Pers.	1	1	5

personne, qui prendra ses tonneaux comme la premiere personne. Enfin le troisiéme nombre 1 s'appliquera à la troisiéme personne, qui prendra un tonneau plein, un tonneau vuide, & cinq à moitié pleins, pour en avoir sept. Ainsi ces trois personnes auront autant de tonneaux & de vin l'une que l'autre.

On a mis ici deux Tables, que l'on peut distinguer en colonnes perpendiculaires, & en colonnes horisontales. Les colonnes perpendiculaires marquent la qualité des tonneaux qui doivent être distribués à chacune des trois personnes, & les colonnes horisontales ou transversales marquent la quantité des tonneaux, eu égard à leur qualité, qui doivent être distribués à chaque personne.

Il est évident que les trois personnes ont chacune 7 tonneaux, comme il paroît en ajoutant ensem-

ble les nombres qui se trouvent dans une colomne horisontale ; & qui appartiennent à une seule personne. Il est aisé de reconnoître qu'elles ont autant de vin l'une que l'autre, en ajoutant les tonneaux pleins, avec la moitié des tonneaux demi-pleins d'une part, & les tonneaux vuides avec la moitié restante des tonneaux demi pleins, ou plutôt demi vuides d'autre part pour la même personne. On fera la même observation sur les exemples & les Tables suivantes.

REMARQUES.

La regle générale pour résoudre ces sortes de Questions, est de diviser le nombre des tonneaux par le nombre des personnes. Si le quotient n'est pas un nombre entier, la question est impossible : mais si le quotient est un nombre entier, il faut partager ce quotient en autant de parties qu'il y a de personnes, avec cette condition, que chacune de ces parties sera plus petite que la moitié du quotient trouvé. Chaque personne prendra autant de tonneaux vuides que pleins.

S'il étoit proposé de partager 21 tonneaux à 4 personnes, la Question seroit impossible, puisqu'on ne peut diviser exactement 21 par 4.* Mais si on proposoit de partager à 4 personnes 24 tonneaux, avec les mêmes conditions ci-dessus, la Question est très-possible ; car divisant 24 par 4, il vient au quotient *6*, qui est un nombre entier, & *6* peut être divisé en ces quatre parties 2, 2, 1, 1, qui serviront à la solution de la Question propo-

* Pour partager également à quatre personnes 21 tonneaux, il faudroit en donner $5\frac{1}{4}$ à chacune. On ne peut ainsi briser un tonneau en plusieurs piéces.

sée, selon la Table qu'on a ajouté ici, où l'on voit

	pleins.	*vuides.*	*½ pleins*	*½ vuides.*
1e Perf.	2	2	1	1
2e Perf.	2	2	1	1
3e Perf.	1	1	2	2
4e Perf.	1	1	2	2

que les quatre personnes ont autant de tonneaux & de vin l'une que l'autre.

Cette Question n'a qu'une seule solution, parce que le nombre 6 ne peut être partagé en 4 autres parties, telles que la plus petite soit moindre que la moitié de lui-même.

On peut encore partager 27 tonneaux à trois personnes, avec les mêmes conditions que l'on a supposé dans les autres exemples : car 27 peut être exactement divisé par 3, & le quotient est 9 ; mais ce nombre 9 peut être divisé en trois paaties, dont chacune sera plus petite que la moitié de lui-même : ce qui se peut faire en trois manieres diffé-

	pleins.	*vuides.*	*½ pleins.*
1e Perf.	3	3	3
2e Perf.	3	3	3
3e Perf.	3	3	3

rentes : car 9 peut être premierement partagé en ces trois parties 3, 3, 3, dont la somme fait 9. La Table qui est ci-dessus montre ce que chacune des trois personnes doit avoir de tonneaux tant pleins que vuides & demi pleins.

Ce même nombre 9 peut en second lieu être

divisé en trois autres nombres 1, 4, 4, qui pris

	pleins.	vuides.	$\frac{1}{2}$ pleins.
1e. Perſ.	1	1	7
2e. Perſ.	4	4	1
3e. Perſ.	4	4	1

enſemble font 9. Les trois perſonnes ſeront partagées de la maniere qu'on le voit dans cette Table.

Enfin ce nombre 9 peut être partagé en ces trois autres nombres, 2, 3, 4, dont la ſomme eſt 9;

	pleins.	vuides.	$\frac{1}{2}$ pleins.
1e. Perſ.	2	2	5
2e. Perſ.	3	3	3
3e. Perſ.	4	4	1

& les trois perſonnes ſeront partagées comme il eſt marqué dans la Table qu'on a ici ajouté.

On voit dans ces trois dernieres Tables que les trois perſonnes ont autant de tonneaux & de vin l'une que l'autre.

PROBLEME XLV.

Quinze Chrétiens & quinze Turcs ſe trouvent ſur Mer dans un même Vaiſſeau, il ſurvient une furieuſe tempête. Après avoir jetté dans l'eau toutes les Marchandiſes, le Pilote dit qu'il eſt encore néceſſaire d'y jetter la moitié des perſonnes. Il les fait ranger de ſuite, & en comptant de neuf en neuf, il jette chaque neuviéme dans la Mer, en recommençant à compter le premier du rang, lorſque le rang eſt fini: il ſe trouve

Digitized by Google

qu'après avoir jetté quinze personnes, les quinze Chrétiens sont restés. Comment a-t-il disposé les trente personnes pour sauver les Chretiens ?

LA disposition de ces trente personnes se tirera de ces deux Vers François.

Mort, tu ne faillira pas,
En me livrant le trépas.

Il suffit de faire attention aux voyelles A, E, I, O, U, qui se trouvent dans les syllabes des mots qui composent ces deux Vers. On doit supposer que A vaut 1, E vaut 2, I vaut 3, O vaut 4, & U vaut 5. On commencera à ranger des Chrétiens, puis des Turcs, & ainsi de suite, en mettant alternativement des Chrétiens & des Turcs, jusqu'à ce qu'on ait rangé les trente personnes. Cela étant supposé, l'O, qui est dans la premiere syllabe (Mort) fait connoître qu'on doit ranger d'abord 4 Chrétiens; l'U, qui est dans la seconde syllabe (tu) montre qu'on doit ranger ensuite 5 Turcs; l'E, qui est dans la troisiéme syllabe (ne) fait voir qu'on doit disposer 2 Chrétiens; l'A, de la quatriéme syllabe (fail) montre qu'on doit mettre ensuite 1 Turc; l'I de la cinquiéme syllabe fait connoître qu'on doit ranger 3 Chrétiens, & ainsi des autres, en appliquant les voyelles de chaque syllabe aux nombres qu'on leur a attribué.

REMARQUE.

Au lieu des deux Vers François, on peut employer ce Vers Latin, où l'on trouve les mêmes voyelles dans le même ordre.

Populeam virgam mater Reginà ferebat.

On donnera ici plus d'étendue à ce Problême ; afin qu'il puiſſe être utile aux Capitaines, qui ayant pluſieurs Soldats à punir ſont obligés de les faire décimer. Par ce moyen ils feront tomber le ſort ſur les plus coupables, en les rangeant de la maniere que nous allons enſeigner.

La regle eſt d'écrire autant de zeros qu'il y a de perſonnes coupables, & commençant à compter par le premier zero de marquer avec une croix le quantiéme qu'on voudra punir, & de faire la même choſe en recommençant le rang, & paſſant les zeros marqués juſqu'à ce qu'on ait marqué le nombre qu'on ſouhaite punir. Il faudra diſpoſer les Soldats de la même maniere qu'on a rangé les zeros, & mettre les plus coupables au lieu où ſe trouveront les zeros marqués de la croix.

Par exemple, ſi trente-ſix Soldats ſont coupables, & qu'on en veuille punir ſix des plus coupables en les décimant, c'eſt-à-dire, en les comptant dix à dix, pour faire punir chaque dixiéme, on les rangera comme on voit ces trente-ſix zeros rangés, & on aura ſoin de faire mettre les plus coupables à la place où l'on voit des croix ſur les zeros.

```
o o o o o o o o o o o o o o o o o o
      +           +       +
o o o o o o o o o o o o o o o o o o
  +       +           +
```

Il eſt aiſé d'appliquer cette regle à quelque nombre que ce ſoit, & à quelque quantiéme qu'on veuille rejetter d'un nombre déterminé.

On prétend que c'eſt en pratiquant cette regle, que Joſephe, l'Hiſtorien Juif, reſta ſeul avec un autre, de quarante & un qu'ils étoient dans une caverne, où ils s'étoient retirés après la priſe de

Digitized by Google

Jotapata par Vespasien. L'Histoire en est assez curieuse pour la rapporter ici : je ne ferai que la copier de la Préface de Bachet sur ses *Problêmes plaisans & delectables*, après l'avoir conféré avec ce qu'en dit lui-même Josephe, dans son Histoire de la Guerre des Juifs, Liv. 3. chap. 14.

Hegesippus, dit Bachet, rapporte au troisiéme Livre de la Prise de Jerusalem, la mémorable Histoire de Josephe, qui étant Gouverneur dans la Ville de Jotapata, lorsqu'elle fut assiegée, & un peu après emportée d'assaut par Vespasien, fut contraint de se retirer dans *une caverne qui étoit au fond d'une fosse, où il trouva quarante braves guerriers*, pour éviter la fureur des armes victorieuses des Romains. Mais il fut exposé à un plus grand péril parmi les siens, que parmi les ennemis ; car comme il eut arrêté de s'aller rendre à la discretion du Vainqueur, ne pouvant imaginer aucun autre moyen de se garantir de la mort, il trouva ses Soldats saisis d'une telle frénésie, qu'ils vouloient tous mourir, & s'entretuer les uns les autres plutôt que de prendre ce parti. Josephe s'efforça de les détourner d'une si malheureuse entreprise ; mais ce fut en vain : car rejettant tout ce qu'il pût alleger au contraire, & persistant en leur opinion, ils en vinrent jusques-là que de le menacer, que s'il ne s'y portoit volontairement, de l'y contraindre par force, & de commencer par lui-même l'execution de leur tragique dessein. Alors sans doute c'étoit fait de sa vie, s'il n'eût eu l'esprit de se défaire de ces furieux, par l'artifice de mon vingt-troisiéme Problême : car feignant d'adhérer à leur volonté, il se conserva l'autorité qu'il avoit sur eux, & par ce moyen leur persuada facilement, que pour

» éviter le désordre & la confusion qui pourroient
» survenir en un tel acte, s'ils s'entretuoient à la
» foule, il valoit mieux se ranger par ordre en
» quelque façon, & commençant à compter par
» un bout, massacrer toujours la tantiéme (l'Au-
» teur n'exprime pas le quantiéme) jusqu'à ce qu'il
» n'en demeurât qu'un seul, lequel seroit obligé
» de se tuer lui-même. Tous en étant demeurés
» d'accord, Josephe les disposa de cette sorte, &
» choisit pour lui une si bonne place, que la tue-
» rie étant continuée jusqu'à la fin, il demeura seul
» avec un autre, qu'il sauva apparemment de la
» même maniere, parce qu'il pouvoit en attendre
» une entiere & parfaite obéissance.

Bachet nous instruit lui-même dans son vingt-troisiéme Problême de la maniere dont Josephe a pû s'y prendre pour se sauver lui-même avec un de ses compagnons. Comme il y avoit quarante Soldats avec Josephe dans cette caverne, ce qui faisoit en tout quarante & une personnes, on peut supposer qu'il ordonna que comptant de trois en trois on tueroit toujours le troisiéme. Cela étant supposé, il est aisé de connoître par la regle, qu'il se mit le trente & uniéme, & qu'il fit mettre en la seiziéme place celui qu'il voulut sauver.

PROBLEME XLVI.

Trois choses ayant été distribuées secretement à trois personnes, deviner celle que chacun aura pris.

QUe ces trois choses soient une Bague, un Ecu & un Gant; vous vous représenterez la Bague par la lettre A, l'Ecu par E, & le Gant par I. Que les trois personnes soient Pierre, Si-

Digitized by Google

mon & Thomas ; vous les regarderez dans leur place tellement rangés, que l'un, comme Pierre, sera le premier, Simon le Second, & Thomas le troisiéme. Ayant fait ces dispositions en vous-même, vous prendrez vingt-quatre jettons, dont vous donnerez un à Pierre, deux à Simon, & trois à Thomas ; vous laisserez les dix-huit autres sur la table : ensuite vous vous retirerez de la compagnie, afin que les trois personnes se distribuent les trois choses proposées, sans que vous le voyez. Cette distribution étant faite, vous direz que celui qui a pris la Bague prenne, des dix-huit jettons qui sont restés, autant de jettons que vous lui en avez donné : que celui qui a pris l'Ecu prenne des jettons restés deux fois autant de jettons que vous lui en avez donné : enfin que celui, qui a pris le Gant, prenne sur le reste des jettons quatre fois autant de jettons que vous lui en avez donné. (Dans notre supposition Pierre en aura pris un, Simon quatre, & Thomas douze ; par conséquent il ne sera resté qu'un jetton sur la table.) Cela étant fait, vous reviendrez, & vous connoîtrez par ce qui sera resté de jettons la chose que chacun aura pris, en faisant usage de ce Vers François.

1 2 3 5 6 7
Par fer Cesar jadis devint, si grand Prince.

Pour pouvoir se servir des mots de ce Vers, il faut sçavoir qu'il ne peut rester qu'un jetton, ou 2, ou 3, ou 5, ou 6, ou 7, & jamais 4 ; il faut de plus faire attention que chaque syllabe contient une des voyelles, que nous avons dit représenter les trois choses proposées : enfin il faut considerer ce Vers, comme n'étant composé que de sept mots, & que la premiere syllabe de chaque

mot représente la premiere personne, qui est Pierre, & la seconde syllabe représente la seconde personne, qui est Simon. Cela bien conçu, s'il ne reste qu'un jetton, comme dans notre supposition, vous vous servirez du premier mot, ou plutôt des deux premieres syllabes, *Par fer*, dont la premiere, qui contient A, fait voir que la premiere personne, ou Pierre, a la Bague représentée par A, & la seconde syllabe, qui contient E, montre que la seconde personne, ou Simon, a l'Ecu représenté par E; d'où vous conclurez facilement que la troisiéme personne, ou Thomas, a le Gant.

S'il restoit 2 jettons, vous consulteriez le second mot *Cesar*, dont la premiere syllabe, qui contient E, feroit connoître que la premiere personne auroit l'Ecu représenté par E, & la seconde syllabe, qui contient A, montreroit que la seconde personne auroit la Bague représentée par A, d'où il seroit aisé de conclure que la troisiéme personne auroit le Gant. En un mot, selon le nombre des jettons qui resteront, vous employerez le mot du Vers qui sera marqué du même nombre.

REMARQUES.

Au lieu du Vers François qu'on a rapporté, on peut se servir de ce Vers Latin.

1	2	3	5	6	7
Salve	*certa*	*animæ*	*semita*	*vita*	*quies.*

Ce Problême peut être executé un peu autrement qu'on vient de le faire, & on peut l'appliquer à plus de trois personnes: ceux qui voudront en être plus particulierement instruits, consulte-

Digitized by Google

font Bachet dans le vingt-cinquiéme de ses *Problêmes plaisans & délectables.*

PROBLEME XLVII.

Trois personnes ont un certain nombre d'écus. La premiere donne des siens aux deux autres autant qu'elles en ont chacune. Ensuite la seconde en donne aux deux autres autant qu'elles en ont chacune. Enfin la troisiéme en donne aux deux autres autant qu'elles en ont chacune. Cette distribution étant faite, il se trouve que chaque personne a huit écus. On demande combien elles en avoient chacune.

LA premiere personne avoit 13 écus, la seconde 7, & la troisiéme 4; ce qu'il est aisé de reconnoître en distribuant les écus de chaque personne, suivant ce qui est énoncé dans le Problême.

REMARQUE.

L'Algebre donne aisément la résolution de ce Problême. Ceux, qui commencent à l'apprendre, pourront s'exercer à la trouver, & à former d'autres Problêmes sur ce modéle. Comme si la premiere personne donne trois fois autant d'écus aux deux autres, qu'elles en ont, &c. & qu'au lieu de déterminer le nombre égal d'écus que chaque personne a à la fin, ils le laissent indéterminé, ils trouveront des solutions à l'infini. Ils reconnoîtront aussi que ce Problême quarante-septiéme est le fondement du trentiéme.

PROBLEME XLVIII.

Il se trouve trois personnes dans une compagnie, la seconde est plus âgée que la premiere de douze ans, la troisiéme est plus âgée que la seconde de treize ans : leurs trois âges font le nombre de cent ans. On demande quel est l'âge de chaque personne.

IL faut ajouter les deux différences des âges données, qui sont ici 12 & 25 (car la troisiéme personne ayant 13 ans plus que la seconde, il faut joindre la différence de ses années avec celle des années de la seconde.) La somme de ces deux différences est 37, qu'il faut ôter de la somme totale 100, le reste 63 sera divisé par 3, nombre des personnes dont on veut sçavoir les âges : le quotient 21 est l'âge de la premiere personne ; par conséquent 33 est l'âge de la seconde, & 46 l'âge de la troisiéme. Ces trois nombres 21, 33, 46, font ensemble 100.

PROBLEME XLIX.

Découvrir si un ouvrage que l'Ouvrier assure être de pur or, est mêlé d'argent, sans l'endommager.

VItruve rapporte que le Roi Hieron voulant faire faire une couronne d'or d'un poids considerable, on donna la matiere à un Orfévre. La couronne fût très-bien faite, & elle se trouva être d'un poids égal à l'or qui avoit été fourni : on appréhenda cependant que l'Orfévre n'eût volé de l'or, & n'y eût mêlé de l'argent. Archiméde fut

chargé de découvrir la fraude, sans endommager la couronne, il le fit en plongeant entierement la couronne dans un vase plein d'eau, & en pesant exactement la quantité d'eau qui en étoit sortie, il plongea aussi entiérement dans le même vase plein d'eau deux masses, l'une d'or & l'autre d'argent, & pesa exactement la quantité d'eau qu'avoient fait sortir du vase ces deux masses, qui y avoient été plongées l'une après l'autre, il trouva que la masse d'or pur avoit fait sortir une plus petite quantité d'eau que la couronne d'or, & que la couronne d'or en avoit fait sortir une plus petite quantité que la masse d'argent.

Le même Auteur ne dit point quelle étoit la quantité de l'or, ni quel fut le raisonnement d'Archiméde pour découvrir la tromperie de l'Orfévre. Mais on peut supposer que la couronne pesoit 20 marcs; qu'ayant été plongée dans un vaisseau plein d'eau, elle en fit sortir 13 marcs d'eau; que la masse d'or pur & d'égal poids n'en fit sortir que 12 marcs d'eau; qu'enfin la masse d'argent en fit sortir 18 marcs d'eau.

Cela supposé, on découvrira par la regle de fausse position, ou par quelques équations Algébriques, que l'Orfévre avoit mêlé 3 marcs & un tiers d'argent dans la couronne. Voyez l'*Abregé de l'Arithmétique* d'Irson, p. 395, on y trouvera la solution de plusieurs questions par Algebre.

PROBLEME L.

Un Boucher donne commission d'acheter pour cent écus cent bêtes, sçavoir, des bœufs, des veaux, des brebis & des cochons. Le Commissionnaire lui amene cent bêtes: il a payé 9 écus de cha-

que bœuf, 1 écu de chaque veau, 30 sols de chaque brebis, & 3 écus de chaque cochon. On demande combien il a amené de bœufs, de veaux, de brebis & de cochons.

CE Problême est capable d'un grand nombre de résolutions; c'est ce qui fait qu'on ne peut déterminer précisément le nombre de chaque sorte de bêtes que le Commissionnaire a amené. Il pourroit avoir amené 3 bœufs, 44 veaux, 52 brebis & un cochon, qui font en tout 100 bêtes: le prix des bœufs est 27 écus, le prix des veaux est 44 écus, le prix des brebis est 26 écus, & le prix du cochon est 3 écus: tous ces prix font ensemble 100 écus, selon les conditions du Problême. On peut dire encore qu'il a amené 4 bœufs, 17 veaux, 76 brebis, & 3 cochons: ce qu'on pourra vérifier par les prix de chaque sorte de bêtes, qu'on a déterminé dans les conditions du Problême: ou bien 5 bœufs, 5 veaux, 88 brebis, & 2 cochons, &c.

PROBLEME LI.

QUESTION I.

Un particulier a fait marché avec un Ouvrier pour creuser un puits de 20 toises de profondeur, à condition de lui donner 30 livres, quand il aura achevé ce puits. L'Ouvrier tombe malade, après avoir creusé 12 toises. On demande combien il est dû à cet Ouvrier.

IL est dû à cet Ouvrier 11 livres & $\frac{1}{7}$. Pour résoudre cette Question, & les autres de même nature, il faut faire une regle de trois, dont le premier

Digitized by Google

premier terme sera la somme des toises de la Progression Arithmétique depuis 1 jusqu'à 20, que l'on trouvera * être ici 210; le second terme sera la somme dont on est convenu, qui est dans cette question 30 livres, & le troisiéme terme sera la somme des termes depuis 1 jusqu'à 12, que l'on trouvera * être ici 78; car il est constant qu'il y a plus de peine à creuser les toises plus avancées, que celles qui le sont moins, & cela en proportion Arithmétique.

* Par le Problême X. Art. I. pag. 59.

QUESTION II.

Un Tailleur a pris six aulnes de drap, qui a trois quarts de large, pour faire un habit complet : on veut sçavoir combien il faut d'aulnes d'une étoffe qui n'a qu'une demie aulne de large.

ON prendra neuf aulnes de cette étoffe, qui n'a qu'une demie aulne de large. Cette question paroît embarrassante; il faut s'y conduire avec quelque précaution. Elle se réduit à une regle de trois inverse, qu'on peut énoncer de cette façon. Si $\frac{3}{4}$ donnent 6 aulnes, combien $\frac{1}{2}$ ou $\frac{2}{4}$? On exprime la demie aulne par $\frac{2}{4}$, afin que le troisiéme terme soit analogue au premier. Pour résoudre cette question ainsi énoncée, il ne faut point avoir égard au dénominateur 4, qui est le même dans les deux fractions, il suffit de multiplier 6 aulnes par 3 numérateur de la premiere fraction, & de diviser le produit 18 par 2 numérateur de l'autre fraction.

Digitized by Google

REMARQUES.

Il y a certaines questions qui se résolvent par l'attention que l'on fait à la chose exprimée, & à la maniere dont elle est exprimée : on en donnera quelques exemples dans les articles suivans.

I.

Un Rotisseur achete 20 perdrix, 8 livres, à raison de 2 livres cinq : un autre Rotisseur de ses voisins a besoin de perdrix, il le prie de lui en vendre quelques-unes au prix courant. Que doit faire le Rotisseur pour les vendre au même prix, & y gagner ? Il doit en faire deux parts, en séparant les dix meilleures d'avec les autres qui ne sont pas si bonnes. Il vendra la paire des meilleures une livre, & trois des moindres une livre aussi : ces cinq vaudront 2 livres, qui est le prix courant. De cette maniere le Rotisseur vendra 5 livres les dix perdrix grasses, & des dix moindres il en vendra neuf pour 3 livres ; de sorte qu'il lui restera une perdrix pour le gain.

II.

On demande le juste prix d'un cent pesant de cordage gaudronné ; supposant que le cent pesant de chanvre coute 16 livres, & qu'on paye 52 sols 6 deniers pour la peine de l'espader, peigner & filer. On suppose en second lieu que le cent pesant de chanvre diminue de 8 livres dans sa réduction, ou conversion en fil blanc, & qu'on donne 4 sols 9 deniers pour la peine de gaudronner le

cent peſant de fil blanc. On ſuppoſe en troiſiéme lieu que le cent peſant de fil blanc ne prend que 20 livres de gaudron par cent; que la livre de gaudron vaut 8 deniers, & qu'on paye 16 ſols pour la peine de le cordager.

Solution.

Je mets en une ſomme 16 livres, & 52 ſols 6 deniers, c'eſt-à-dire, le prix du chanvre & de ſa façon, pour le réduire en fil blanc; cela fait 18 livres 12 ſols 6 deniers: ce ſera le prix de 92 livres de fil blanc ſeulement, à cauſe des 8 livres de déchet en le façonnant. Je dis: ſi 92 livres de fil blanc coutent 18 livres 12 ſols 6 deniers, combien couteront 100 livres du même fil blanc? il vient 20 livres 4 ſols 10 deniers, & $\frac{16}{23}$ de denier, pour la valeur du cent de fil blanc prêt à gaudronner.

Il ne reſte donc plus qu'à ajouter à cette ſomme les 4 ſols 9 deniers pour la peine de gaudronner le cent peſant de fil blanc; il faut encore y ajouter 13 ſols 4 deniers pour les 20 livres de gaudron à 8 deniers la livre: ces trois ſommes ajoutées enſemble font 21 livrss 2 ſols 11 deniers $\frac{16}{23}$ de denier pour le prix de 120 livres de fil gaudronné.

Il faut enſuite dire: ſi 120 livres de fil gaudronné coutent 21 livres 2 ſols 11 deniers, & $\frac{16}{23}$ de denier, combien couteront 100 livres? il viendra 17 livres 12 ſols 5 deniers, & $\frac{103}{138}$ de denier, pour la valeur du cent peſant de fil gaudronné, auquel ajoutant 16 ſols pour la peine de le cordager, on aura 18 livres 8 ſols 5 deniers, & $\frac{103}{138}$ de denier;

pour la valeur juſte du cent peſant de cordage gaudronné.

Cet exemple eſt extrait de l'Arithmétique Univerſelle : on a crû qu'il étoit aſſez curieux pour trouver ici ſa place.

PROBLEME LII.

Faire parcourir au Cavalier du Jeu des Echets toutes les caſes du Damier, l'une après l'autre ſans entrer deux fois dans la même caſe.

ON ſçait que le Cavalier du Jeu des Echets a une marche toute particuliere ; il va, pour ainſi dire, en caracolant, & il paſſe d'une caſe d'un rang à une caſe d'un autre rang, en ſautant par-deſſus deux caſes, & allant du blanc au noir, & du noir au blanc.

I.

Ce Problême peut recevoir un grand nombre de ſolutions ; il eſt aſſez conſidérable pour avoir mérité l'attention de quelques grands Géometres. Il eſt vrai qu'ils n'en ont point donné de ſolution générale : c'eſt ce qui marque la difficulté qu'il y a à la trouver ; ils en ont cependant communiqué quelques-unes particulieres : on ne rapportera ici que trois de ces ſolutions ; dans les deux premieres, on commence à faire partir le Cavalier de la caſe d'un angle du Damier, & dans la troiſiéme on commence à le faire partir de l'une des quatre caſes qui ſont au milieu du Damier ; cette derniere maniere de réſoudre le Problême propoſé eſt plus difficile à trouver que les autres.

La premiere eſt de M. de Montmort, Auteur

Digitized by Google

de l'Essai de l'Analise sur les jeux de hasard ; la seconde est de M. Moivre, Anglois ; la troisiéme est de M. de Mairan, Directeur de l'Academie Royale des Sciences, * à qui je dois le Problême, & les trois solutions qu'on trouve ici. * 1722

Les Tables suivantes représentent un Damier ; on a mis des nombres dans les cases que le Cavalier doit parcourir l'une après l'autre. Ainsi dans la maniere de M. Montmort, le Cavalier se place d'abord sur la premiere case d'en haut, qui est à côté gauche : de-là on le fait passer à la troisiéme case du second rang horisontal, où l'on a marqué 2 ; ensuite on le fait sauter dans la cinquiéme case du premier rang horisontal marqué 3 ; après on le fait passer dans la septiéme case du second rang horisontal marqué 4 : on continue à le faire aller dans les cases qni sont marquées des nombres selon leur

I. *de M. de Montmort.*

1	38	31	44	3	46	29	42
32	35	2	39	30	43	4	47
37	8	33	26	45	6	41	28
34	25	36	7	40	27	48	5
9	60	17	56	11	52	19	50
24	57	10	63	18	49	12	53
61	16	59	22	55	14	51	20
58	23	62	15	64	21	54	13

ordre naturel, jusqu'à ce qu'il soit parvenu à la cinquiéme case du dernier rang horisontal d'en bas, marquée 64, qui est la derniere où il arrive,

après avoir passé dans toutes les cases les unes après les autres.

On fera la même observation dans les deux autres Tables; on suivra l'ordre naturel des nombres, pour conduire le Cavalier dans toutes les cases.

II. *de M. de Moire.*

34	49	22	11	36	39	24	1
21	10	35	50	23	12	37	40
48	33	62	57	38	25	2	13
9	20	51	54	63	60	41	26
32	47	58	61	56	53	14	3
19	8	55	52	59	64	27	42
46	31	6	17	44	29	4	15
7	18	45	30	5	16	43	28

III. *de M. de Mairan.*

40	9	26	53	42	7	64	29
25	52	41	8	27	30	43	6
10	39	24	57	54	63	28	31
23	56	51	60	1	44	5	62
50	11	38	55	58	61	32	45
37	22	59	48	19	2	15	4
12	49	20	35	14	17	46	33
21	36	13	18	47	34	3	16

Il suffit de jetter les yeux sur ces trois Tables, pour connoître la marche qu'on doit faire tenir au Cavalier, lorsqu'on l'a placé sur l'une des cases marquées 1. On peut choisir telle autre case qu'il plaira, & rechercher soi-même par quelles cases passera le Cavalier, pour les lui faire parcourir toutes l'une après l'autre, quand on l'aura placé sur la case qui aura été choisie.

II.

Premiere maniere.

Pour exécuter ce Problême sur un Damier, il faut mettre un jetton sur chaque case, en sorte que toutes les cases blanches & noires soient couvertes de jettons. On commencera par ôter le jetton de la case où l'on placera d'abord le Cavalier, & à mesure qu'on le fera entrer dans une autre case, on ôtera le jetton qui la couvre. Ainsi on sera sûr d'avoir fait parcourir toutes les cases au Cavalier, quand tous les jettons auront été levés.

Seconde maniere.

Au lieu de couvrir d'abord de jettons toutes les cases, on peut ne couvrir chaque case, qu'à mesure qu'on y fait passer le Cavalier, & quand toutes les cases seront couvertes, on sera assuré d'avoir exécuté le Problême.

III.

La méthode de M. Moivre a paru la plus simple; c'est ce qui a engagé à la developper: mais afin de faire voir l'ordre qu'il a suivi, je vais séparer & décomposer, pour ainsi dire, les nombres

marqués dans les cases du second quarré précédent, & donner trois aurres quarrés, par le moyen desquels j'espere qu'il sera aisé de retenir cette maniere, pour la pratiquer sur le champ, sans avoir besoin de consulter aucun modéle.

Soit donc le quarré ABCD, divisé en 64 quarrés, qui représentent les cases d'un Damier.

J'appelle les bandes ou les rangs AB, BD, AC, CD, *premieres bandes*, ou *premiers rangs en dehors*. J'appelle encore les bandes EG, KL, HM, IN, *secondes bandes*, ou *seconds rangs en dehors*, par rapport aux premiers rangs en dehors, qu'on vient d'indiquer; & ainsi des autres, à mesure qu'on rentre dans le milieu du quarré.

		H					I		
A			22	11			24	1	B
E	21	10			23	12			G
							2	13	
	9	20							
							14	3	
	19	8							
K			6	17			4	15	L
C	7	18			5	16			D
		M					N		

1°. On peut placer indifféremment le Cavalier sur la case de l'un des quatre angles du quarré. On commencera à le placer ici sur la case de l'angle

B, ſuivant le modele qui m'a été communiqué par M. de Mairan ; de la caſe B marquée 1, on ira à la caſe marquée 2 dans la ſeconde bande IN ; de-là on placera le Cavalier à la marquée 3 du premier rang en dehors BD, d'où on viendra à la caſe marquée 4 du ſecond rang IN ; puis à la caſe marquée 4 du ſecond rang en dehors CD, & ainſi de ſuite, juſqu'à ce qu'on ſoit parvenu à la caſe 12, en faiſant le tour du Damier, ſans ſortir des deux premieres bandes en dehors.

2°. Quand on ſera parvenu à la caſe marquée 12, on recommencera un ſecond tour du Damier dans le même ſens qu'on vient de le faire. Ainſi de la caſe marquée 12, on ira à la caſe marquée 13 du premier rang BD ; de 13 on viendra à 14, dans le ſecond rang IN ; puis à 15 ; enſuite à la caſe marquée 16 du premier rang en dehors CD, & ainſi des autres, juſqu'à ce qu'on ſoit parvenu à la caſe marquée 24, qui eſt à côté de celle par laquelle on a commencé, en faiſant en même ſens qu'auparavant le tour du Damier, ſans ſortir des deux premieres bandes en dehors, vers les extrêmités du Damier.

REMARQUES.

Il nous a paru que le principe fondamental de la méthode de M. Moivre, étoit de remplir d'abord les caſes des deux premieres bandes en dehors, en tournant en même ſens autour du Damier comme on vient de le pratiquer, & comme on le pratiquera encore dans la ſuite, juſqu'à ce qu'on avertiſſe qu'il faut prendre un ſens contraire en tournant autour du centre du Damier.

Pour éviter la confuſion dans le quarré ſuivant,

on n'a point marqué les vingt-quatre nombres marqués dans les cases du quarré précédent ; mais à leur place on a mis des points, pour faire connoître que ces cases ont été parcourues par le Cavalier.

3°. Quand on est parvenu à la case marquée 24, on est forcé d'aller à la case marquée 25, mais de cette case on ira à celle qui est marquée 26 de la premiere bande BD, pour faire un troisiéme tour en même sens qu'auparavant, & continuer à remplir les cases des deux premieres bandes en dehors, suivant le principe fondamental : de la case marquée 26, on viendra à la case marquée 27 ; puis à celle qui est marquée 28 ; ensuite à 29, & ainsi des autres, jusqu'à ce qu'on soit parvenu à la case marquée 37, qui suit immédiatement dans la même diagonale le case marquée 1, qui est celle par où l'on a commencé : ce qu'il est à propos d'observer sur le Damier.

4°. De la case marquée 37, on ne peut aller qu'à

		H					I		
A	34	49	—	—	36	39	24	—	B
E	—	—	35	50	—	—	37	40	G
P	48	33			38	25	—	—	Q
R	—	—				Z	41	26	S
	32	47					—	—	
	—	—					27	42	
K	46	31	—	—	44	29	—	—	L
C	—	—	45	30	—	—	43	28	D
		M					N		

case marquée 38 dans la troisiéme bande PQ, ou à

celle qui eſt marquée Z dans la quatriéme bande RS; mais on préférara la caſe qui eſt marquée 38 dans la bande PQ pour ſatisfaire au principe fondamental, qui eſt de faire parcourir d'abord au Cavalier les deux premieres bandes en dehors; car de la caſe Z on ne peut venir dans les deux premiers rangs BD, IN, pour recommencer un quatriéme tout en même ſens que les autres : mais en portant le Cavalier à la caſe marquée 38, on peut retourner à la premiere bande BD, en paſſant par la caſe marquée 39 de la premiere bande AB, & de-là à la caſe 40 de la bande BD, où l'on voit qu'on reprend le même ſens que dans les autres tours.

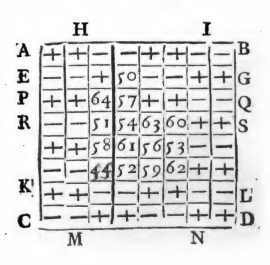
5°. Ainſi de 38 on paſſera à 39, & de 39 on viendra à la caſe qui eſt marquée 40 dans le premier rang en dehors BD, d'où l'on paſſera à la caſe marquée 41 dans la ſeconde bande IN, puiſque les autres caſes ſont remplies : on continuera à faire le tour en même ſens que les autres, ſuivant la marche du Cavalier dans les deux premieres bandes en dehors, juſqu'à ce qu'on ſoit parvenu à la caſe marquée 50 dans la ſeconde bande EG.

REMARQUES.

On a dit qu'on doit recommencer les tours en même ſens : cela doit s'entendre que le Cavalier étant parvenu dans les caſes de la diagonale, où il a d'abord été placé, ou dans une caſe voiſine, il faut le placer auſſi-tôt qu'on le peut dans l'une des caſes de la premiere bande en dehors BD, & ſuivre les extrêmités du Damier dans les deux premieres bandes en dehors, en allant de la bande BD en DC, de DC en CA, & de CA en AB.

Pour éviter encore la confuſion, on ne marquera pas les nombres marqués dans les quarrés précédens : on laiſſera les points du quarré précédent ; mais à la place des nombres qui y ſont, on mettra des croix, pour faire connoître que toutes ces caſes ſont remplies, c'eſt-à-dire, couvertes de jettons, ſi on ſuit la ſeconde maniere d'exécuter le Problême ſur le Damier, ou découvertes ſi on ſuit la premiere.

60. Quand on ſera parvenu à la caſe marquée 50, on ne peut plus recommencer le tour en même ſens, puiſque les caſes des deux premieres bandes ſont remplies, on en commencera un autre en ſens contraire, c'eſt à-dire, qu'on tournera autour du centre du Damier, en s'éloignant de ce centre autant qu'on le pourra, & l'on ira vers la premiere bande en dehors AC, oppoſée à la bande BD.



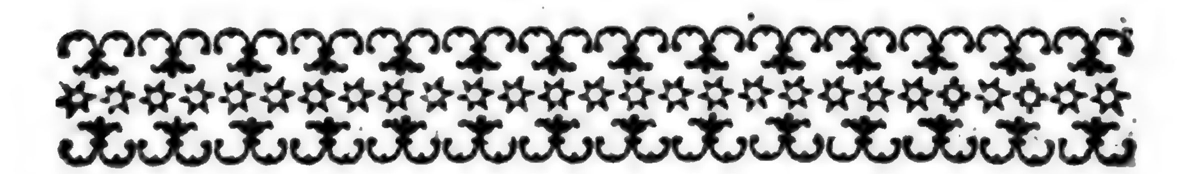
Ainſi de la caſe 50, on placera le Cavalier à la caſe 51 ; de 51, on ira à 52 ; puis à 53, & ainſi de

suite, en tournant autour du centre du Damier en sens contraire aux premiers, & en s'éloignant du centre autant qu'il sera possible.

REMARQUE.

On voit que les trois derniers nombres 62, 63, 64, sont ici disposés d'une autre maniere que dans la solution de M. Moivre: cette différente disposition vient de ce qu'on a jugé à propos de continuer depuis la case 50 à faire les tours en sens contraire, afin d'établir une même regle, & de pouvoir la pratiquer dans toute l'étendue de la solution du Problême, quoiqu'avec quelque différence.

Cette méthode a paru facile à retenir, & à executer, quand on y fera quelque attention.



PROBLEMES DE GEOMETRIE.

LA Géométrie n'eſt pas moins féconde que l'Arithmetique; mais elle n'eſt pas ſi aiſée dans ſes opérations, ni par conſéquent ſi agréable dans la réſolution de ſes Problêmes: c'eſt pourquoi je ne mettrai que ceux qui me paroîtront les plus faciles & les plus agréables.

PROBLEME I.

Elever une perpendiculaire à une ligne donnée par l'une de ſes extrêmités.

I.

Plan. 1. Fig. 3. POur élever une perpendiculaire à la ligne donnée AB, par ſon extrêmité A, mettez à l'extrêmité A une des pointes du compas ouvert à volonté, & prenez ſur cette ligne AD prolongée, s'il eſt néceſſaire, trois parties égales AC, CD, DB, dont la derniere DB ſe termine ici par hazard à l'autre extrêmité B de la ligne donnée AB. Décrivez de l'intervalle CB des deux dernieres parties, & par leurs extrêmités B, C, deux arcs de cercle, qui ſe coupent au point E: puis des deux points E, C, & avec la même ouverture du compas décrivez deux autres arcs de cercle, qui ſe coupent ici au point F. Par ce point F, & par

l'extrêmité donnée A, vous tirerez la droite AF, qui sera perpendiculaire à la ligne proposée AB. Plan. 1. Fig. 3.

II.

Si vous voulez tirer, par l'autre extrêmité B de la même ligne donnée AB, une ligne qui lui soit en même tems égale & perpendiculaire, divisez la ligne AB en trois parties égales aux points C, * D. Puis ayant trouvé le point F, comme il vient d'être enseigné, décrivez de l'extrêmité donnée B, & de l'intervalle AF, l'arc de cercle GHI, & portez sur cet arc la même ouverture du compas deux fois de G en H, & de H en I. Décrivez avec la même ouverture du compas & des deux points H, *I*, deux arcs de cercle qui se coupent ici au point K. Enfin menez la droite BK, elle sera égale & perpendiculaire à la ligne proposée AB.

* Voyez le Problême III. suivant.

PROBLEME II.

Mener par un point donné une ligne parallele à une ligne donnée.

I.

POur mener par le point donné C une ligne parallele à la ligne donnée AB, prenez à volonte sur cette ligne AB, deux points proche des deux extrêmités A, B, comme D, E: puis du point donné C & de l'intervalle DE, décrivez un arc de cercle vers F; ensuite du point E & de l'intervalle CD, décrivez un autre arc de cercle, qui rencontre ici le premier au point F. Par ce point F, & par le point donné C, vous menerez la droite CF, qui sera parallele à la proposée AB. Fig. 4.

II.

Si vous voulez que la ligne parallele ſoit égale à la ligne AB, au lieu de vous ſervir des deux points D, E, ſervez-vous des deux extrêmités A, B. Du point donné C, & de l'intervalle de la ligne donnée AB, décrivez un arc de cercle vers G : puis de l'extrêmité B, & de l'intervalle AC, décrivez un autre arc de cercle qui coupera le premier en G. Par ce point G, où ces deux arcs ſe coupent, & par le point donné C, menez la droite CG, elle ſera égale & parallele à la propoſée AB.

PROBLEME III.

Diviſer d'une même ouverture de compas une ligne donnée en autant de parties égales qu'on voudra.

Plan .1. Fig. 4 & 5. SI vous voulez diviſer la ligne donnée AB en quatre parties égales, prolongez-la autant qu'il eſt néceſſaire, comme ici juſqu'en E, en ſorte que AB, BC, CD, DE, ſoient quatre parties égales chacune à AB. Faites ſur ces parties les quatre Triangles équilateraux ABF, BCG, CDH, DEI; ce qui peut ſe faire avec la même ouverture de compas. Enfin menez les droites AG, AH, AI : alors la ligne HM repréſentera une des quatre parties de la ligne AB, la ligne DM en repréſentera par conſéquent trois, & la ligne FK, ou BK en repréſentera deux.

Mais la ſeule ligne AI ſuffit : car elle retranche la ligne B1, égale à la quatriéme partie de la ligne AB, la ligne C2 égale à la moitié de la même ligne AB, & la ligne D3, égale aux trois quarts de la même ligne AB.

La

Digitized by Google

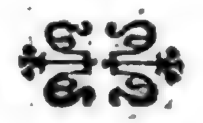
La ligne AH ſert pour diviſer la ligne propoſée AB en trois parties égales; car la ligne GL en repréſente une, & la ligne CL en repréſente par conſéquent deux. Mais la même ligne AI ſuffit auſſi pour la diviſion de la ligne donnée AB en trois parties égales, parce que la ligne BN en repréſente une, & la ligne CO en repréſente deux. D'où il ſuit que la ligne HO en repréſente auſſi une.

PROBLEME IV.

Faire un angle qui ſoit la moitié, ou le double d'un angle donné.

PRemierement, pour faire un angle ADG, qui ſoit la moitié de l'angle donné ABC; de ſon ſommet B comme centre, & de l'intervalle BD pris à volonté ſur l'un des côtés AB prolongé à diſcretion, decrivez le demi-cercle DEF. Puis par le point D & par le point E, où le demi-cercle coupe l'autre côté BC de l'angle donné, menez la ligne DG: l'angle ADG ſera la moitié de l'angle donné ABC. Plan. 3. Fig. 6.

Secondement, pour faire un angle ABC, qui ſoit double de l'angle donné ADG; d'un point B comme centre pris à volonté ſur l'un des côtés AD, & de l'intervalle BD diſtance de B, juſques au ſommet D de l'angle donné, décrivez le demi-cercle DEF. Puis par le point B & par le point E, où le demi-cercle coupe l'autre côté de l'angle donné, menez la ligne BC: l'angle ABC ſera double de l'angle donné ADG.



PROBLEME V.

Faire un angle qui ſoit le tiers, ou le triple d'un angle donné.

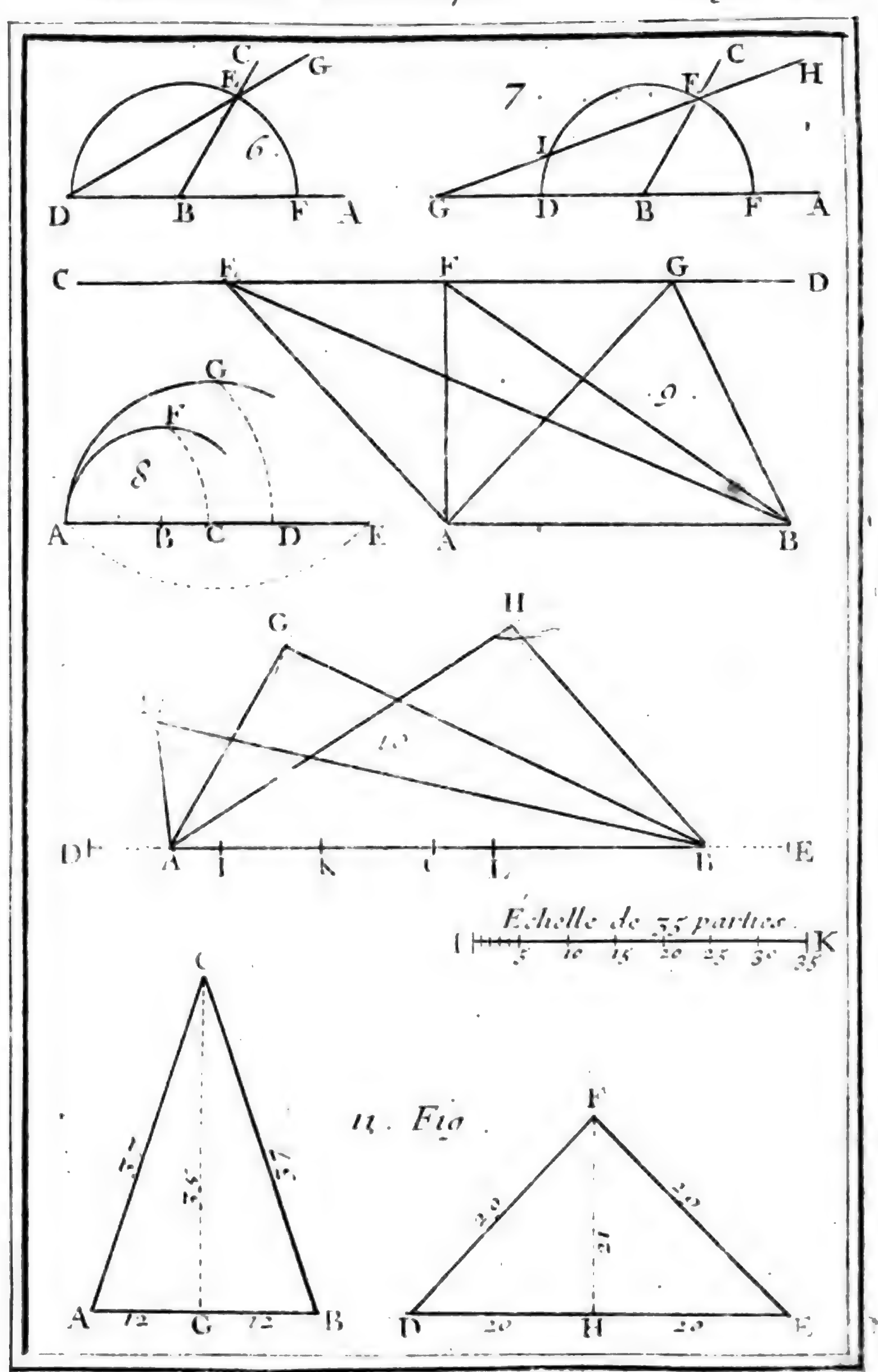
Plan. 3. Fig. 7. PRemierement, pour faire un angle égal à la troiſiéme partie de l'angle donné ABC, de ſon ſommet B comme centre, & de l'intervalle BD pris à volonté, décrivez le demi-cercle DEF; puis appliquez une regle bien droite au point E, en ſorte que ſa partie GI, terminée par la circonference du demi-cercle DEF, & par la ligne AD prolongée, ſoit égale au demi-diametre BD, ou BE. Après cela menez la droite GE, qui fera au point G, l'angle AGH égal à la troiſiéme partie de l'angle ABC. L'arc ID ſera auſſi égal à la troiſiéme partie de l'arc EF, qui meſure l'angle donné ABC.

Secondement, pour faire un angle égal au triple de l'angle donné AGH; ayant pris à diſcretion ſur la ligne GH, le point I, portez la longueur IG ſur la ligne AG, de I en B, pour décrire du point B, & de l'intervalle IB, le demi-cercle DEF, qui paſſera par le point I, & donnera ſur la ligne GH le point E. Par ce point E & par le point B, vous tirerez la droite BE, qui ſera l'angle ABC, triple du donné AGH.

PROBLEME VI.

Trouver à deux lignes données une troiſiéme, & autant d'autres proportionnelles qu'on voudra.

Fi. 8. POur trouver aux deux lignes données AB, AC, une troiſiéme proportionnelle, décrivez



Digitized by Google

de l'extrêmité B de la premiere AB, par l'autre extrêmité A, l'arc de cercle AF, ſur lequel ayant mis la longueur de la ſeconde AC, de A en F, portez la même longueur ſur la ligne AC, prolongée autant qu'il ſera beſoin de F en D, & la ligne AD ſera troiſiéme proportionnelle aux deux lignes données AB, AC.

De même pour trouver aux trois lignes AB, AC, AD, une quatriéme proportionnelle, ou ce qui eſt la même choſe, aux deux AC, AD, une troiſiéme proportionnelle, décrivez de l'extrêmité C de la premiere AC, par l'autre extrêmité A, l'arc de cercle AG, ſur lequel ayant mis la longueur de l'autre ligne AD, de A en G, portez la même longueur AD ſur la ligne AD prolongée, de G en E, & la ligne AE ſera celle qu'on cherche : & ainſi de ſuite.

PROBLEME VII.

Décrire ſur une ligne donnée autant de Triangles differens qu'on voudra, dont les aires ſoient égales.

SI la ligne donnée eſt AB, tirez à diſcrétion la parallele CD, ſur laquelle ayant pris à volonté autant de points differens que vous voudrez de Triangles égaux, comme E, F, G, pour trois Triangles, menez de ces trois points E, F, G, aux extrêmités A, B, de la ligne donnée AB, des lignes droites, & vous aurez les trois Triangles égaux AEB, AFB, AGB, ſur la même baſe AB.

Plan. 31 Fig. 9.

PROBLEME VIII.

Décrire ſur une ligne donnée autant de Triangles differens qu'on voudra, dont les contours ſoient égaux.

Plan. 3. Fig. 10. SI la baſe donnée eſt AB, diviſez-la en deux également au point C, & prolongez-la de part & d'autre à volonté en D, & en E, en ſorte que les deux lignes CD, CE, ſoient égales entre elles. Toute la ligne DE ſera priſe pour la ſomme des deux côtés de chaque Triangle, qu'on décrira ſur la baſe donnée AB en cette ſorte.

Decrivez du point A, avec une ouverture de compas un peu plus grande que AD, un arc de cercle vers F. Puis ayant porté cette ouverture ſur la ligne DE, de D en I, décrivez du point B, & de l'intervalle IE, un autre arc de cercle, qui coupera le premier au point F. Ce ſera le ſommet du premier Triangle ABF.

Décrivez pareillement du point A, avec une ouverture de compas un peu plus grande que AF, un arc de cercle vers G. Puis ayant porté cette ouverture ſur la ligne DE, de D en K, décrivez du point B, & de l'intervalle KE, un autre arc de cercle, qui coupera le premier au point G. Ce ſera le ſommet du ſecond Triangle AGB, dont le contour ſera égal au contour du premier AFB.

Si vous voulez un troiſiéme Triangle, décrivez encore du point A un arc de cercle vers H, avec une ouverture de compas un peu plus grande que AG. Puis ayant porté, comme auparavant, cette ouverture ſur la ligne DE, de D en L, décrivez du point B, & de l'intervalle LE un autre arc de

cercle, qui coupe ici le premier au point H. Ce ſera le ſommet du troiſiéme Triangle AHB, dont le contour ſera le même que celui des deux précédens. Ainſi des autres.

Vous remarquerez que les ſommes F, G, H, de tous ces Triangles, ſe trouvent ſur la circonférence d'une Ellipſe, dont le grand axe eſt DE, & les deux Foyers ſont A, B.

PROBLEME IX.

Décrire deux Triangles iſoſceles différens, de même aire, & de même contour.

AYant préparé une Echelle IK, diviſée en autant de parties égales qu'il conviendra, prenez ſur la baſe AB, les deux Segmens GA, GB, chacun de 12 parties priſes ſur l'Echelle ; élevez au point G ſur la même baſe AB la perpendiculaire GC de 35 des mêmes parties ; tirez les deux lignes égales AC, BC, & vous aurez le premier Triangle iſoſcéle ACB, dont chacun des côtés égaux AC, BC, ſe trouvera de 37 parties, comme on le connoîtra en ajoutant le quarré 144 du Segment AG, avec le quarré 1225 de la perpendiculaire CG, & en prenant la racine quarrée de la ſomme 1369. Plan. 3. Fig. 11.

Pour avoir un Triangle de même aire & de même contour que le précédent, prenez ſur la baſe DE, les deux Segmens HD, HE, chacun de 20 parties, & ayant élevé au point H ſur la baſe DE la perpendiculaire HF de 21 parties, tirez les lignes égales EF, DF, dont chacune ſe trouvera de 29 parties, comme on le connoîtra en ajoutant le quarré 400 du Segment DH, avec le quarré 441

de la perpendiculaire HF, & en prenant la racine quarrée de la somme 841.

Ainsi vous aurez le Triangle isoscéle DEF, dont le contour 98 est égal au contour, c'est-à-dire, à la somme des trois côtés du premier Triangle isoscele ABC, & dont l'aire, ou le contenu 420 est égal au contenu du premier Triangle isoscele ABC, comme on le connoît en multipliant DH par FH, ou 20 par 21 : car le produit 420 qui en vient pour l'aire du Triangle DEF, est le même que celui qui vient en multipliant AG par CG, ou 12 par 35, pour l'aire du Triangle ABC.

On peut décrire autant de couples qu'on voudra de Triangles isosceles de même aire & de même contour, en trouvant en nombres ces couples; ce qui se peut faire en cherchant les deux nombres générateurs des moitiés ACG, DFH, qui sont deux Triangles rectangles égaux. Ces nombres générateurs connus serviront à en trouver d'autres, par le moyen desquels on trouvera deux Triangles rectangles, comme il a été enseigné au *Problême IX. d'Arithmetique*, *pag.* 50. Voici la méthode de trouver les nombres générateurs des deux Triangles rectangles ACG, DFH, qui est générale pour tout autre Triangle rectangle, dont on connoît les trois côtés, ou au moins deux.

Pour trouver les nombres générateurs du Triangle ACG, ajoutez l'hypoténuse 37 à l'un des côtés 12, vous aurez le quarré 49, dont la racine est 7, que vous garderez. Ajoutez encore l'hypoténuse 37 à l'autre côté 35, pour avoir une somme 72, dont la moitié 36 a pour racine quarrée 6, qui est un des nombres générateurs. Enfin prenez la différence de 6 à 7, & vous aurez 1 pour l'autre nombre générateur du Triangle ACG.

Digitized by Google

Il faut ſuivre la même opération pour trouver les nombres générateurs du Triangle DFH : ajoutez l'hypoténuſe 29 au côté 20, vous aurez encore le quarré 49, dont la racine eſt 7, que vous garderez : ajoutant encore la même hypoténuſe 29 à l'autre côté 21, vous aurez 50, dont la moitié 25 a pour racine quarrée 5, qui eſt un des nombres générateurs. Enfin prenez la différence de 5 à 7, & vous aurez 2 pour l'autre nombre générateur du Triangle DFH.

Ainſi les nombres générateurs du Triangle ACG, ſont 6, 1 : & les nombres générateurs du Triangle DFH ſont 5, 2.

A préſent *pour avoir autant qu'on voudra de couples de Triangle de même aire & de même contour*, il faut multiplier les nombres générateurs 6, 1, 5, 2, par un même nombre tel qu'il plaira : ſi on les multiplie par 2, on aura 12, 2, & 10, 4 pour nombres générateurs de deux autres Triangles rectangles de même aire : car multipliant 12 par 2, on aura 24, dont le double 48 ſera AG, un des côtés du nouveau Triangle ; puis ajoutant 144, 4 quarrés de 12, 2, on aura la ſomme 148 pour l'hypoténuſe AC. Enfin ôtant 4, quarré de 2, de 144, quarré de 12, on aura 140 pour l'autre côté CG : ainſi le Triangle rectangle ACG, dont les côtés étoient 37, 35, 12, ſe trouvera transformé en un autre, dont les côtés ſeront 148, 140, 48. *Pour avoir un Triangle iſoſcéle*, il ne faut que prolonger la baſe AG juſqu'en B, faire GB égale à AG, qui eſt ici de 48 parties, & tirer la ligne CB, qui ſera de 148 parties comme AC. Ce Triangle iſoſcele ainſi ſuppoſé, aura 392 parties de contour & 6720 de ſuperficie.

De même pour avoir l'autre nouveau Triangle,

dont les nombres générateurs sont 10, 4, on multipliera 10 par 4, & l'on aura 40, dont le double 80 sera le côté DH; ensuite ajoutant 100 & 16, quarrés de 10, 4, on aura 116 pour l'hypoténuse DF, & ôtant 16, quarré de 4, de 100, quarré de 10, 4, on aura 84 pour l'autre côté FH: ainsi le Triangle rectangle DFH, dont les côtés étoient 29, 21, 20, se trouvera transformé en un autre, dont les côtés seront 116, 84, 80. Pour achever le Triangle isoscele, il ne faut que prolonger DH jusqu'en E, en faisant DE égale à DH, qui est ici de 80 parties, & tirer la ligne FE, qui sera de 116 parties, comme DF. Ce nouveau Triangle isoscéle aura 392 parties de contour, & 6720 de superficie: par conséquent il sera de même aire & de même contour que l'autre.

On peut s'exercer, en multipliant les nombres générateurs 6, 1: 5, 2, par un tel autre nombre qu'on voudra.

PROBLEME X.

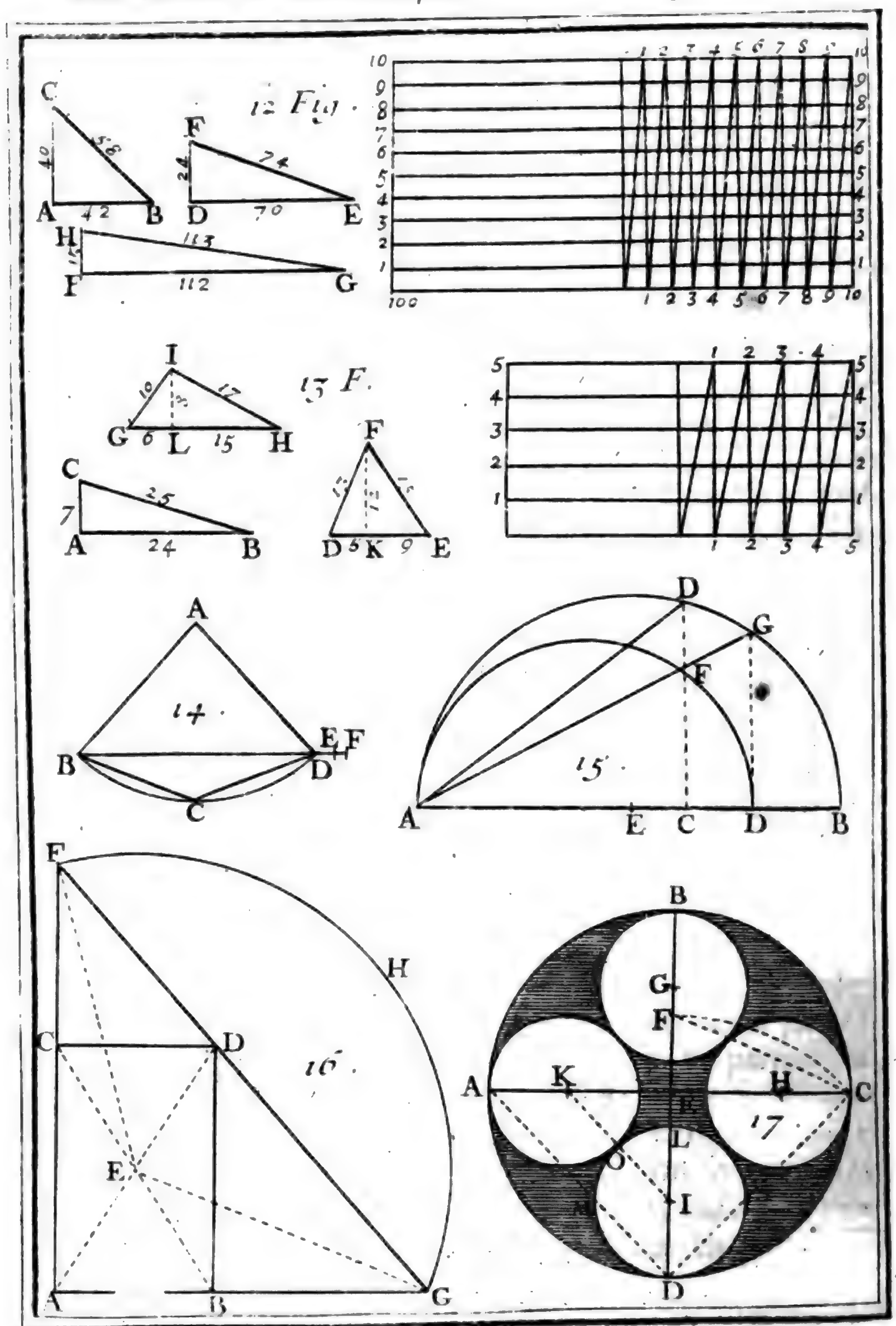
Décrire trois différens Triangles rectangles, dont les aires soient égales.

Plan. 4. Fig. 12.

AYant préparé une Echelle divisée en parties égales, prenez la base AB de 42 parties, & la hauteur ou perpendiculaire AC de 40; l'hypotenuse BC du premier Triangle rectangle ABC se trouvera de 58 parties, comme on le connoîtra en ajoutant le quarré 1764 de la base AB, au quarré 1600 de la hauteur AC, & en prenant la racine quarrée de la somme 3364.

Prenez ensuite la base DE du second Triangle rectangle DEF de 70 parties, & la hauteur DF de

Digitized by Google


12 Fig.
13 F.
14
15
16
17

24 ; l'hypoténuse EF se trouvera de 74 parties, comme on le connoîtra en ajoutant ensemble le quarré 4900 de la base DE, & le quarré 576 de la hauteur DF, & en prenant la racine quarrée de la somme 5476. L'aire de ce second Triangle rectangle DEF sera égale à celle du premier ABC, chacune étant 840, comme on le connoît en multipliant la base par la hauteur, & en prenant la moitié du produit.

Enfin prenez la base FG du troisiéme Triangle rectangle FGH, de 112 parties, & la hauteur FH de 15 ; l'hypotenuse BC se trouvera de 113 parties, comme on le connoîtra en ajoutant ensemble le quarré 12544 de la base FG, le quarré 225 de la hauteur FH, & en prenant la racine quarrée de la somme 12769. L'aire de ce troisiéme Triangle rectangle FGH sera aussi 840.

Ces trois Triangles rectangles ont été trouvés en nombres entiers, par ce Canon que nous avons tiré de l'Algébre, qui nous apprend que pour trouver en nombres entiers, trois Triangles rectangles égaux, on doit auparavant trouver trois nombres qui serviront de nombres générateurs, en cette sorte.

Si on ajoute le produit de deux nombres quelconques a la somme de leurs quarrés, on aura le premier nombre. La différence de leurs quarrés sera le second : & la somme de leur produit & du quarré du plus petit, sera le troisiéme nombre générateur.

Si de ces trois nombres ainsi trouvés, on forme trois Triangles rectangles, sçavoir, l'un des deux premiers, l'autre des deux extrêmes, & le troisiéme du premier & de la somme des deux autres, ces trois Triangles rectangles seront égaux entr'eux.

* Voyez le Problême IX. d'Arithm. p. 50.

On peut trouver en nombres rompus autant d'autres Triangles rectangles qu'on voudra, dont les aires seront égales entr'elles & à l'un des trois précédens, en trouvant par le moyen de ce Triangle rectangle un autre Triangle rectangle égal, en cette sorte.

Formez de l'hypoténuse du Triangle rectangle proposé, & du quadruple de son aire, un autre Triangle rectangle, que vous diviserez par le double du produit, qui viendra en multipliant l'hypoténuse du Triangle rectangle proposé par la différence des quarrés des deux autres côtés du même Triangle rectangle, & vous aurez un Triangle rectangle égal au proposé.

PROBLEME XI.

Décrire trois Triangles égaux, dont le premier soit rectangle, le second soit acutangle, & le troisiéme soit obtusangle.

Plan. 4. Fig. 13.

AYant préparé, comme auparavant, une Echelle divisée en parties égales, qui peuvent représenter des pieds, des toises, & tout ce qu'il vous plaira, prenez la base AB du Triangle rectangle ABC de 24 parties, & la hauteur AC de 7; l'hypoténuse BC se trouvera de 25 parties, comme on le connoîtra en ajoutant ensemble le quarré 576 de la base AB, & le quarré 49 de la hauteur AC, & en prenant la racine quarrée de la sommme 625.

Prenez ensuite sur la base DE du Triangle acutangle DEF, le Segment KD de 5 parties, & le Segment KE de 9; élevez du point K sur la base DE, la perpendiculaire KF de 12 parties: alors

le côté DF se trouvera de 13 parties, comme on le connoîtra en ajoutant ensemble le quarré 25 du Segment DK, & le quarré 144 de la hauteur FK, & en prenant la racine quarrée de la somme 169. L'autre côté se trouvera de 15 parties, comme on le connoîtra en ajoutant ensemble le quarré 81 du Segment KE, & le quarré 144 de la perpendiculaire KF, & en prenant la racine quarrée de la somme 225.

Enfin prenez sur la base GH du Triangle obtusangle GHI, le Segment LG de 6 parties, & le Segment LH de 15; élevez du point L, sur la base GH, la perpendiculaire LI de 8 parties, alors le côté GI se trouvera de 10 parties, comme on le connoîtra en ajoutant ensemble le quarré 36 du Segment GL, & le quarré 64 de la hauteur IL, & en prenant la racine quarrée de la somme 100. Le côté HI se trouvera de 17 parties, comme on le connoîtra en ajoutant au quarré 225 du Segment LH, le quarré 64 de la perpendiculaire LI, & en prenant la racine quarrée de la somme 289.

On connoît que le Triangle ABC est rectangle en A, parce que la somme 625 des quarrés 49, 576, des deux côtés AC, AB, est égale au quarré du troisiéme côté BC: que le Triangle DEF, est acutangle, parce que la somme des quarrés de deux côtés quelconques est plus grande que le quarré du troisiéme côté: enfin que le Triangle GHI est obtusangle, & que l'angle I est obtus, parce que le quarré 441 de son côté opposé GH, qui est de 21 parties, est plus grand que la somme 389 des quarrés 100, 289, des deux autres côtés GI, HI.

Enfin on connoît que ces trois Triangles ABC, DEF, GHI, sont égaux, c'est-à-dire, que leurs

aires sont égales, parce qu'en multipliant la base AB par la hauteur AC, il vient le même produit qu'en multipliant la base DE par la hauteur FK, où la base GH par la hauteur LI, sçavoir 168, qui est le double de l'aire de chaque Triangle, laquelle par conséquent sera 84. La perpendiculaire FK, & les trois côtés du Triangle acutangle DEF, sont dans une proportion continue Arithmetique.

PROBLEME XII.

Trouver une ligne droite égale à son arc de cercle donné.

Plan. 4. Fig. 14.

* Voyez le Probl. III. pag. 272.

POur trouver une ligne droite égale à l'arc de cercle BCD, dont le centre est A, & le rayon ou demi-diamétre est AB, ou AD, divisez * cet arc en deux également au point C. Tirez les cordes BC, CD, BD. Prolongez la corde BD en E, en sorte que la ligne BE soit double de l'une des deux cordes égales BC, CD, c'est-à-dire, égale à la somme de ces deux cordes. Prolongez encore la ligne BE en F, en sorte que la ligne EF soit égale à la troisiéme partie de la ligne DE, * & la ligne droite BF sera à peu près égale à la courbe BCD. J'ai dit à peu près, parce que la ligne BF est tant soit peu moindre que l'arc BCD; mais la différence est si petite, lorsque l'arc BCD ne passe pas 30 degrés, qu'il ne s'en faut pas une partie de cent mille qu'on peut donner au rayon AB, ou AD.

REMARQUE.

Si l'arc BCD est précisément de 30 degrés, ou la douziéme partie de la circonference de tout le

cercle, & que le rayon AB, ou AC ſoit de 50000 parties, on connoîtra par la Trigonometrie que chacune des deux cordes BC, CD, eſt de 13053 parties. Ainſi leur ſomme, ou la ligne BE ſera de 26106 parties, de laquelle ôtant la corde BD, qui ſe trouvera de 25882 parties, il en reſtera 224 pour la ligne DE, dont la troiſiéme partie eſt 74 pour la ligne EF. Cette troiſiéme partie étant ajoutée à la ligne BE, ou à 26106, la ſomme ſera 26180 pour la ligne BF, ou pour l'arc BCD. Enfin multipliant cet arc, ou 26180 par 12, on aura 314160 pour la circonference du cercle. Ainſi nous ſçavons que quand le diametre d'un cercle eſt de 100000 parties, la circonference eſt d'environ 314160 ſemblables parties; & par conſéquent que le diamétre d'un cercle eſt à ſa circonference à peu près, comme 100000 eſt à 314160, ou comme 10000 à 31416.

Ce rapport ſert à *trouver la circonference d'un cercle, dont on connoît le diamétre.* Il faut multiplier ce diametre par 31416, & diviſer le produit par 10000. Cette diviſion ſe fera en retranchant de ce produit quatre figures à la droite: les figures qui reſteront à la gauche, feront connoître la circonference du cercle, & les figures retranchées ſeront le numerateur d'une fraction, dont le dénominateur ſera 10000.

Pour connoître la circonference d'un baſſin rond d'un jet d'eau, dont le diametre eſt, par exemple, de 64 pieds, on multipliera 64 par 31416, on retranchera quatre figures à la droite du produit 2010624, & l'on aura 201 pieds $\frac{624}{10000}$, pour la circonference qu'on cherche.

Il faudra faire tout le contraire, ſi on veut *connoître le diametre d'un cercle, ou d'une boule*

par sa circonference connue, c'est-à-dire, qu'il faudra multiplier cette circonference par 100000; ce qui se fera en lui ajoutant vers la droite quatre zeros, & l'on divisera le produit par 31416.

Ainsi pour connoître le diametre d'une Tour ronde, dont on sçait que le contour ou la circonference mesurée en dehors par le moyen d'une longue corde, est de 154 pieds, on ajoutera quatre zeros à la droite de ce nombre 154, on divisera 1540000 par 31416, & l'on aura 49 pieds $\frac{616}{31416}$ pour le diamétre qu'on cherche.

PROBLEME XIII.

Trouver entre deux lignes données, une, ou deux, ou trois moyennes proportionnelles.

I.

Plan. 4. Fig. 15. PRemierement, pour trouver entre deux lignes données AB, AC, une moyenne proportionnelle, partagez la plus grande AB en deux parties égales au point E. De ce point E, comme centre & de l'intervalle AE, ou EB, décrivez le demi-cercle ADB; portez ensuite de A en C la plus petite ligne AC: élevez au point C la perpendiculaire CD, & menez la droite AD, qui sera moyenne proportionnelle entre les deux AB, AC.

II.

Fig. 16. En second lieu, pour trouver entre deux lignes données AB, AC, deux moyennes continuement proportionnelles, faites de ces deux lignes données

AB, AC, le Parallelogramme rectangle ABCD: puis décrivez de son centre E, l'arc de cercle GHF de telle grandeur que la droite FG, qui sera tirée par les deux points F, G, où il coupe les deux lignes données AC, AB, prolongées, passe par le sommet D de l'angle droit du Parallelogramme. Alors les deux lignes CF, BG, seront les deux moyennes proportionnelles, qu'on cherche. De sorte que les quatre lignes AB, CF, BG, AC, seront continuement proportionnelles. Plan. 4 Fig. 16.

III.

Enfin, pour trouver entre deux lignes données AB, AC, trois moyennes continuement proportionnelles, après avoir trouvé entre ces deux lignes données AB, AC, une moyenne proportionnelle AD, comme il a été enseigné, * cherchez de la même façon entre cette moyenne AD, & la premiere AC, une autre moyenne proportionnelle AF, & entre la même moyenne AD & la derniere AB, une autre moyenne proportionnelle AG. Les trois lignes AF, AD, AG, seront les moyennes proportionnelles qu'on cherche: de sorte que les cinq lignes AC, AF, AD, AG, AB, seront dans une proportion continue. Fig. 15.

* Art. I.

REMARQUES.

Si les deux lignes AB, AC, sont données en nombres, comme si AB étoit de 32 pieds, & AC de 2, on pourra exprimer en nombres les trois moyennes AF, AD, AG, en multipliant ensemble les deux nombres 32, & 2, des deux lignes données AB, AC, & en prenant la racine quarrée du produit 64, qui donnera 8 pour la moyen-

ne AD, laquelle étant multipliée ſéparément par la premiere AC, & par la derniere AB, les racines quarrées des deux produits 16, 256, donneront 4 pour AF, & 16 pour AG.

Fig. 16. Mais pour trouver en nombres ſeulement deux moyennes proportionnelles entre les deux propoſées AB, AC, telles que ſont les deux CF, BG, en ſuppoſant que la plus petite AB ſoit de deux pieds, & la plus grande AC de 16; multipliez le quarré 4 de la premiere AB par la derniere AC, & prenez la racine cubique du produit 64, qui donnera 4 pour CF premiere des deux moyennes proportionnelles cherchées. De même multipliez le quarré 256 de la derniere AC, par la premiere AB, & prenez la racine cubique du produit 512, qui donnera 8 pour l'autre moyenne proportionnelle BG.

PROBLEME XIV.

Décrire dans un cercle donné quatre cercles égaux qui ſe touchent mutuellement, & qui touchent auſſi la circonference du cercle donné.

Plan. 4. Fig. 17. AYant diviſé le cercle donné ABCD, dont le centre eſt E, en quatre parties égales par les deux diametres perpendiculaires AC, BD, prenez ſur le diametre BD, la ligne DF, égale à la ligne CD, qui eſt la ſoûtendante ou la corde du quart de cercle. La ligne EF ſera la longueur du rayon de chacun des quatre cercles égaux qu'on cherche. Si donc on porte la longueur de cette ligne EF ſur les extrêmités des diamétres perpendiculaires AC, BD, en AK, BG, CH, DI, & que des centres K, G, H, I, on décrive par les points

points A, B, C, D, quatre circonferences de cercles, elles se toucheront mutuellement, & elles toucheront aussi celle du cercle donné ABCD.

REMARQUES.

Si l'on joint deux centres quelconques, comme I, K, par la ligne droite IK, cette ligne droite IK sera parallele à sa corde correspondante DA, & passera par le point d'attouchement O : elle sera aussi en I un angle demi-droit, ou de 45 degrés avec le diametre BD ; d'où il suit que l'arc LO sera de 45 degrés, aussi-bien que l'arc MO, & que tout l'arc LM est un quart de cercle.

Si on joint la droite CF, l'angle ECF sera de 22 degrés 30 minutes ; d'où l'on peut tirer une autre construction pour la résolution du Problême.

PROBLEME XV.

Décrire dans un demi cercle donné trois cercles, qui touchent la circonference & le diametre de ce demi cercle donné, & dont celui du milieu, qui est le plus grand, touche les deux autres, qui sont égaux.

ELevez du centre D du demi-cercle donné ABC, sur son diametre AC, la perpendiculaire DB, & divisez-là en deux également au point E. Ce point sera le centre du cercle BIDK, le plus grand des trois qu'on cherche. Plan. 5. Fig. 18.

Pour décrire les deux autres cercles, qui sont égaux entr'eux, divisez le demi-diamétre DE, en deux également au point H ; puis de l'intervall: BH, & des deux points E, D, comme centres,

decrivez de part & d'autre deux arcs de cercle ; qui se coupent ici en F & G. Ces deux points F, G, seront les centres des deux cercles égaux, qu'il ne sera pas difficile de décrire, parce que le rayon de chacun est égal à la ligne DH, ou à la quatriéme partie du diametre BD, ou bien, ce qui est la même chose, à la huitiéme partie du grand diamétre AC.

REMARQUE.

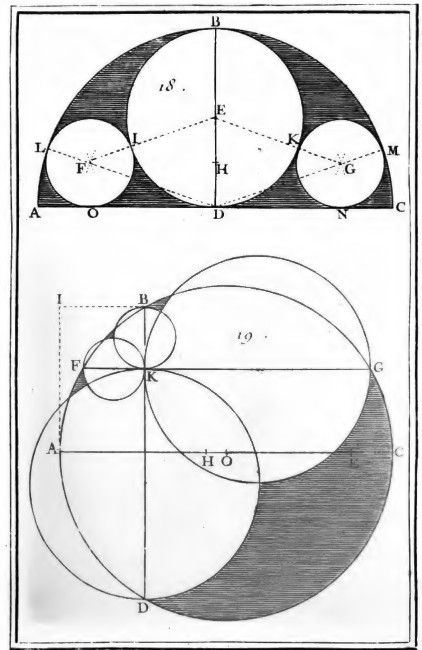
Il est évident que le demi cercle ABC est double du cercle BIDK ; le diametre AC étant double du diametre BD, & que le demi cercle BID, est aussi double du cercle LOI, le rayon DE étant double du rayon FI, ou FL. D'où il est aisé de conclure que le triangle mixtiligne ABID est égal au demi cercle BDI, & par conséquent que le demi cercle ABC se trouve divisé en quatre parties égales par le diametre BD, & par la circonference BIDK.

PROBLEME XVI.

Décrire quatre cercles proportionnels, en sorte que leur somme soit égale à un cercle donné, & que la somme de leurs rayons soit égale à une ligne donnée.

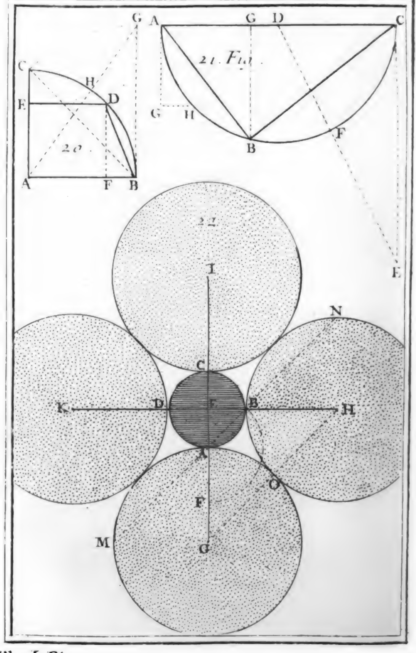
Plan. 5. Fig. 19.

SOit ABCD le cercle donné, dont le point O est le centre, & AC un diametre. Soit AE la ligne donnée, qui doit être plus grande que le rayon AO, & moindre que le diametre AC, si l'on veut que les quatre cercles qu'on cherche, soient inégaux. Les diametres de ces quatre cercles se détermineront en cette sorte.



To. 1. Pl. 5

Digitized by Google



Te. I. Pl. 6.

Digitized by Google

Ayant tiré à volonté dans le cercle donné ABCD la ligne FG parallele au diametre AC, & ayant retranché de la ligne donnée AE la partie EH égale à la moitié de la ligne FG, élevés à l'extrêmité A, du diametre AC, la ligne AI, faites-là égale à AH; & perpendiculaire * au diametre AC, & menez par le point I la ligne IB parallele au diametre AC: cette parallele IB rencontre ici la circonference du cercle donné au point B. Par ce point B: tirez la ligne BD, perpendiculaire à * la ligne FG. Les quatre lignes KF, KB, KG, KD, seront les diametres des quatre cercles qu'on cherche. * Probl. I. p. 272.

REMARQUE.

Il arrivera que les deux plus petits cercles KF, KB, seront égaux entr'eux, aussi-bien que les deux plus grands KG, KD, lorsque la ligne FG sera égale à la ligne donnée AE. Ainsi quand on voudra que tous ces quatre cercles soient inégaux, on doit tirer la ligne FG plus grande ou plus petite que la ligne donnée AE: alors le cercle KF, sera le plus petit de tous, & le cercle KD sera le plus grand.

PROBLEME XVII.

Déterminer sur la circonférence d'un cercle donné un arc, dont le Sinus soit égal à la corde du complement de cet arc.

Pour déterminer sur la circonférence du quart de cercle ABC, dont le centre est A, l'arc CD, dont le Sinus ED soit égal à la corde BD du complement de ces arcs; élevez à l'extrêmité B Plan. 6. Fig. 20.

du rayon AB, la perpendiculaire BG égale à la corde BC du quart de cercle, & tirez du centre A par le point G, la droite AG : puis ayant pris sur le rayon AB, la partie AF egale à la partie GH, élevez au point F sur AB, la perpendiculaire FD, qui déterminera l'arc CD qu'on cherche.

REMARQUE.

La Secante AG de l'arc BH est égale à la Tangente d'un arc de 60 degrés, c'est-à-dire, que le rayon AH étant de 100000 parties, la ligne AG en comprend 173205, de laquelle ôtant AH, ou 100000, le reste 73205 est la partie GH ou AF, c'est-à-dire, le Sinus ED de l'arc CD, qui se trouvera de 47°. 3'. 31''. & par conséquent son complement BD de 42°. 56'. 29''. Ainsi nous sçavons que le Sinus d'un arc 47°. 3'. 31''. est égal à la corde d'un arc de 42°. 56'. 29''. qui est son complement.

PROBLEME XVIII.

Décrire un Triangle le rectangle, dont les trois côtes soient en Proportion Géometrique.

Plan. 6. Fig. 21.

AYant décrit à volonté le demi cercle ABC, dont le centre est D, & dont le diametre AC sera pris pour l'hypotenuse du Triangle rectangle qu'on cherche, tirez par l'extrêmité C de ce diametre AC, la ligne CE égale & perpendiculaire au même diametre AC. Joignez la droite DE, qui se trouve ici coupée par la circonférence du demi-cercle ABC au point F. Portez la longueur de la partie EF sur la circonférence ABC,

Digitized by Google

de A en B, & joignez les droites AB, BC, qui feront au point B un angle droit. Le Triangle rectangle ABC sera celui qu'on cherche ; de sorte qu'il y aura même raison du côté AB, au côté BC, que du même côté BC, à l'hypotenuse AC. Plan. 7. Fig. 21.

REMARQUES.

Si de l'angle droit B, on mene la ligne BG perpendiculaire à l'hypotenuse AC, le plus grand Segment CG sera égal au plus petit côté opposé AB, ou à la partie EF. De-là on peut tirer cette autre construction pour la résolution du Problême. Prenez sur le diametre AC, la partie CG égale à la partie EF, & abbaissant du point O la perpendiculaire GB, elle coupera la circonférence ABC au point B; d'où l'on menera les lignes AB, BC, qui formeront le triangle rectangle cherché.

On aura une troisiéme construction, si l'on considere que l'hypotenuse AC se trouve coupée au point G par sa perpendiculaire BG, en moyenne & extrême raison, c'est-à-dire, que l'hypotenuse AC est à son plus grand Segment CG, comme le même plus grand Segment CG est au plus petit AG.

Si vous voulez une quatriéme construction, abbaissez de l'extrêmité A, la ligne AG perpendiculaire au diametre AC, & égale à la troisiéme partie du même diametre AC, & tirez par le point G au diametre AC, la parallele GH: cette ligne GH sera égale à la troisiéme partie du petit Segment AG.

RROBLEME XVI.

Décrire quatre cercles égaux qui se touchent mutuellement, & qui touchent par le dehors la circonférence d'un cercle donné.

Plan. 6. Fig. 22. AYant divisé le cercle donné ABCD en quatre parties égales par les deux diametres AC, BD, qui se coupent à angles droits au centre E, prenez sur le diametre AC prolongé la ligne AF égale à la ligne AB, ou à la corde du quart de cercle. La ligne EF donnera la longueur du rayon de chacun des quatre cercles égaux qu'on cherche. Si donc on porte cette longueur EF sur chacun des deux diametres prolongés AC, BD, depuis la circonférence du cercle donné ABCD aux points G, H, I, K, & que de ces points, G, H, I, K, comme centres, on décrive, par les points A, B, C, D, autant de cercles égaux, ces quatre cercles se toucheront mutuellement, & toucheront aussi la circonférence du cercle donné ABCD.

REMARQUE.

Si l'on joint deux centres quelconques, comme G, H, par la droite GH, cette ligne GH sera parallele à la corde correspondante AB, & elle passera par le point d'attouchement O. Elle fera par conséquent aux points G, H, des angles demi droits, ou de 45 degrés; ce qui fait que chacun des arcs AG, BO, sera aussi de 45 degrés. D'où il est aisé de conclurre, qu'en prolongeant de part & d'autre la corde AB en M & en N, chacun des arcs AM, BN, sera un quart de cercle.

PROBLEME XX.

Décrire un Triangle rectangle, dont les trois côtés soient en Proportion Arithmetique.

MArquez sur la ligne indéfinie AB cinq parties égales de telle grandeur qu'il vous plaira, de A, en B, & prenant la ligne terminée AB pour l'hypotenuse du Triangle rectangle qu'on cherche, décrivez de son extrêmité A, à l'ouverture des trois parties un arc de cercle, & de l'autre extrêmité B, à l'ouverture de quatre parties un autre arc de cercle qui coupera le premier en un point C, d'où vous tirerez aux deux extrêmités A, B, de l'hypotenuse AB, les droites AC, BC. Le Triangle ABC sera rectangle en C, & ses trois côtés AB, BC, AC, seront en Proportion Arithmétique, c'est-à-dire, qu'ils se surpasseront également, puisque le côté AB est de 5 parties; le côté BC de 4, & le côté AC de 3. Pan. 7. Fig. 23.

REMARQUE.

Ce Triangle rectangle est seul de son espece, dont les trois côtés soient arithmetiquement proportionnels. Ils sont tels, que la somme de leurs cubes en nombres est un cube parfait; car AB étant 5, son cube est 125, BC étant 4, son cube est 64, & AC étant 3, son cube est 27, & la somme 216 de ces trois cubes 125, 64, 27, a pour racine cubique 6, qui dans ce Triangle rectangle se rencontre égale à son aire.

Si on double tous les côtés du Triangle ABC, Fig. 24. en sorte que le côté AB soit de 10 parties, le côté

BC de 8, & le côté AC de 6, on aura un autre Triangle rectangle semblable au précédent. Ses trois côtés seront encore en Proportion Arithmetique, & la somme de leurs cubes sera aussi un cube parfait ; sçavoir, 1728, dont le côté, ou la racine cubique est 12. De plus, l'aire & le contour de ce second Triangle rectangle ABC seront égaux entr'eux, chacun étant 24. Voyez le *Problême XXIII.*

PROBLEME XXI.

Décrire autour d'un Triangle équilateral donné six cercles égaux, qui se couchent mutuellement, dont trois touchent les trois côtés du Triangle, & les trois autres soient portés par ses sommets.

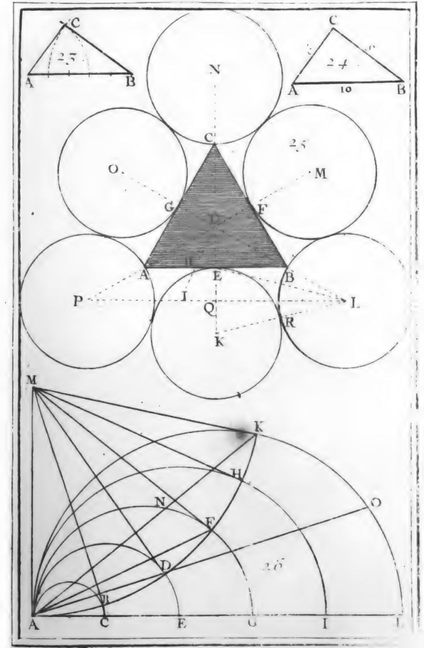
Plan. 7. Fig. 25.

Que le Triangle équilateral donné soit ABC, & que son centre soit D. Tirez de ce centre D, par les trois angles A, B, C, & par les milieux E, F, G, des trois côtés autant de lignes droites, sur lesquelles on doit déterminer les centres K, L, M, N, O, P, de six cercles qu'on cherche, & qu'on trouvera en cette sorte.

Ayant pris sur le côté AB la partie EH égale à la moitié de la perpendiculaire DE, & ayant joint la droite DH, prolongez cette ligne DH en I, en sorte que la partie HI soit égale à la partie HE. Toute la ligne DI donnera la longueur du rayon de chacun des six cercles égaux qu'on veut décrire, dont les centres se trouveront en portant cette longueur DI de E en K, de B en L, &c.

REMARQUE.

Si l'on joint les deux centres P, L, par la droite



3.

To. 1. Pl. 7.

Digitized by Google

PL, cette ligne PL sera parallele au côté AB, & divisera par conséquent à angles droits & en deux également au point Q, le rayon EK. D'où il suit que si l'on joint la droite EL, & la droite KL, qui passera par le point d'attouchement R, le Triangle ELK sera isoscele, chacun des deux côtés égaux EL, KL, étant double de la base EK: l'arc ER sera de 75°. 31'. 20''. & l'arc BR de 44°. 28'. 40''. ce qui fait que ces deux arcs sont ensemble précisément 120 degrés; sçavoir, autant que l'angle PDL.

PROBLEME XXII.

Plusieurs demi cercles qui se touchent au sommet de l'angle droit de deux lignes perpendiculaires, & qui ont leurs centres sur l'une de ces deux lignes étant donnés; déterminer les points où ces demi-cercles peuvent être touchés par des lignes droites tirées de ces points à un point donné sur l'autre ligne perpendiculaire.

QUe les demi-cercles ABC, ADE, AFG AHI, AKL, qui ont leurs centres sur la ligne AL perpendiculaires à la ligne AM,, se touchent au sommet de l'angle droit MAL, & qu'il faille trouver les points où tous ces demi-cercles seront touchés chacun par une ligne droite tirée du point M donné sur la ligne AM. Plan. 7. Fig. 26.

Décrivez du point donné M, comme centre, par le point d'attouchement A, l'arc de cercle AK, qui coupera les circonférences des demi-cercles donnés en des points, comme B, D, F, H, K, qui seront les points d'attouchement qu'on cherche.

Digitized by Google

REMARQUE.

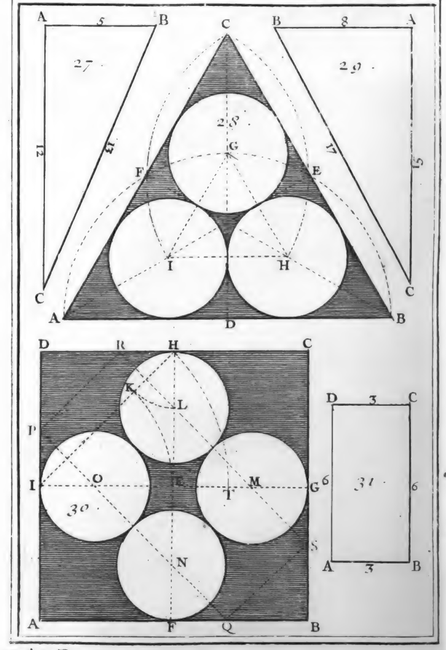
Lorſque les diviſions de la ligne AL ſeront égales entr'elles, on pourra ſe ſervir de ces demi cercles pour diviſer une ligne donnée en parties égales. On portera cette ligne, comme ſeroit AK, ou AO, du point A juſqu'à la circonférence du cinquiéme demi cercle, ſi on la veut diviſer en cinq parties égales : elle ſe trouvera diviſée en cinq parties égales par les circonferences des autres demi-cercles. On diviſera de la même maniere en trois parties égales la ligne propoſée, ou telle autre qu'on voudra, comme AN, &c.

PROBLEME XXIII.

Décrire un Triangle rectangle, dont l'aire exprimée en nombre, ſoit égale au contour.

Plan. 8. Fig. 27. TIrez les deux lignes perpendiculaires AB, AC, de telle longueur, que l'une AB ſoit de 5 parties priſes ſur une Echelle diviſée en parties égales, & que l'autre AC ſoit de 12 parties de la même Echelle. Joignez l'hypotenuſe BC, qui ſe trouvera préciſément de 13 parties égales, comme on le connoîtra en ajoutant enſemble les quarrés 25, 144, des deux côtés AB, AC, & en prenant la racine quarrée de la ſomme 169. L'aire du Triangle rectangle ABC ſera égale à ſon contour, ou à la ſomme des trois côtés, chacun étant 30. Il arrive la même choſe à cet autre Triangle rectangle exprimé en nombres entiers, 6, 8, 10, dont l'aire & le contour ſont chacun 24.

Digitized by Google



Digitized by Google

REMARQUE.

Il n'y a en nombres entiers que ces deux Triangles rectangles, 6, 8, 10 & 5, 12, 13 de chacun desquels l'aire soit égale à son contour : mais en nombres rompus il y en a une infinité, que l'on peut trouver par ce canon général qui a sa démonstration. *Formés d'un nombre quarré quelconque, & du même nombre quarré augmenté de 2, un Triangle rectangle ; divisez-le par ce nombre quarré, & vous aurez un second Triangle rectangle, dont l'aire sera égale à son contour.* Plan. 8. Fig. 27.

Comme si de 9 & de 11, on forme ce Triangle ractangle 40, 198, 202, & qu'on le divise par 9, on aura cet autre Triangle rectangle $\frac{40\ 198\ 202}{9}$ dont l'aire & le contour sont égaux, chacun étant $\frac{440}{9}$, Pareillement si de 16 & de 18, on forme ce Triangle rectangle 68, 576, 580, & qu'on le divise par 16, on aura cet autre Triangle, $\frac{68\ 576\ 580}{16}$, ou bien celui-ci étant réduit à ses moindres termes, $\frac{17\ 144\ 145}{4}$, dont le contour & l'aire sont chacun $\frac{153}{2}$. Ainsi des autres. probl. IX. d'Arithm. p. 50.

PROBLEME XXIV.

Décrire au dedans d'un Triangle équilatéral, trois cercles égaux qui se touchent mutuellement, & qui touchent aussi les trois côtés de ce Triangle.

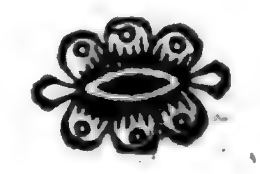
POur inscrire dans le Triangle équilatéral ABC, trois cercles égaux, qui se touchant mutuellement, touchent aussi les côtés de ce Triangle, divisez chacun de ces côtés en deux également aux points D, E, F. Par ces points D, E, F, tirez Fig. 28.

Plan. 8. aux angles opposés autant de lignes droites, sur
Fig. 28. lesquelles vous marquerez les centres G, H, I, des trois cercles qu'on cherche, en transportant sur chaque ligne perpendiculaire la moitié du côté du Triangle équilatéral de son point de milieu, vers le sommet de l'angle, c'est-à-dire, la moitié AD, ou BD, de D en G, de E en I, & de F en H.

Pour avoir le rayon des cercles cherchez, joignez deux centres G, H, par la ligne GH, qui se trouvera divisée en deux parties égales par la ligne tirée du milieu du côté CB, au sommet de l'angle A. Cette moitié sera le rayon de chacun des cercles qu'on cherche : ou bien divisez GC en deux parties égales, la moitié sera aussi le rayon des cercles cherchés.

REMARQUE.

Les droites qui joignent les centres G, H, I, passent par les points d'attouchement, & forment le Triangle équilateral GHI, dont les côtés sont paralleles à ceux du Triangle donné ABC. Il se forme aussi trois Trapezoïdes égaux AIHB, BHGC, CGIA, dont chacun a trois côtés égaux à ceux du Triangle équilateral GHI, & dont les aires sont égales chacune à la huitiéme partie du quarré du côté AB du Triangle donné ABC.



PROBLEME XXV.

Décrire un Triangle rectangle, dont l'aire exprimée en nombre soit sesquialtere du contour aussi exprimée en nombres.

Tirez les deux lignes perpendiculaires AB, AC, de telle grandeur que l'une AB, soit de 8 parties prises sur une Echelle divisée en parties égales, & que l'autre AC soit de 15 parties de la même Echelle. Joignez l'hypoteuuse BC, qui se trouvera précisément de 17 parties égales, comme on le connoîtra en ajoutant ensemble les quarrés 64, 225, des deux côtés AB, AC, & en prenant la racine quarrée de la somme 289. L'aire 60 du Triangle rectangle ABC sera au contour 40, comme 3 est à 2. Il arrive la même chose à cet autre Triangle rectangle en nombres entiers 7, 24, 25, dont l'aire 84 est aussi sesquialtere du contour 56, de sorte que ce contour 46 est égal aux deux tiers de l'aire 84. Plan. 8. Fig. 29.

REMARQUE.

Il n'y a en nombres entiers que ces deux Triangles rectangles 8, 15, 17, & 24, 25 de chacun desquels l'aire soit sesquialtere de son contour : mais en nombres rompus il y en a une infinité d'autres qui ont la même propriété. On peut les trouver par ce Canon général, que nous avons tiré de l'Algebre. *Formez d'un nombre quarré quelconque, & du même nombre quarré augmenté de 3, un Triangle rectangle; divisez-le par ce nombre quarré, & vous aurez un second Triangle rectangle, dont l'aire sera sesquialtere du contour.*

Problême IX. d'Arithmétique, pag. 50.

Comme si de 4 & de 7, on forme ce triangle 33, 56, 65, & qu'on le divise par 4, on aura cet autre Triangle rectangle $\frac{33\ 56\ 65}{4}$, dont l'aire $\frac{231}{4}$ est à son contour $\frac{77}{2}$, comme 3 est à 2. Pareillement si de 16 & de 19 on forme ce Triangle rectangle 105, 608, 608, 617, & qu'on le divise par 16, on aura cet autre Triangle $\frac{105\ 608\ 617}{16}$, dont l'aire $\frac{1995}{16}$ est à son contour $\frac{665}{8}$, comme 3 est à 2. Ainsi des autres.

PROBLEME XXVI.

Décrire au-dedans d'un quarré donné quatre cercles égaux, qui se touchent mutuellement & qui touchent aussi les côtés de ce quarré.

Plan. 8. Fig. 30.

SI le quarré donné est ABCD, divisez chacun de ses côtés en deux également aux points F, G, H, I, & menez les droites FH, GI, qui se couperont à angles droits & en deux également au centre E du quarré. On remarquera sur ces deux lignes FH, GI, les centres L, M, N, O, des quatre cercles qu'on cherche en cette sorte.

Joignez la droite HI, & retranchez-en la partie IK égale à la moitie IE de la ligne IG, ou du côté du quarré donné. Le reste HK sera le rayon de chacun des quatre cercles qu'on veut décrire. C'est pourquoi si l'on porte la longueur HK sur les lignes FH, GI, depuis leurs extrêmités F, G, H, I, aux points N, M, L, O, le Problême sera résolu.

On peut encore le résoudre de cette maniere : retranchez de la ligne IG, la partie IT, égale à la ligne IH; faites les lignes EL, EM, EN, EO, égales chacune au reste TG, & vous aurez, com-

Digitized by Google

me auparavant, les centres L, M, N, O, des quatre cercles qu'on cherche, & que l'on trouvera aussi en faisant les lignes FN, GM, HL, IO, égales chacune à la partie ET.

Voici encore une autre maniere. Faites les quatre lignes AP, AQ, CR, CS, égales chacune à la ligne IH, & joignez les droites PQ, RS, qui donneront sur les deux lignes FH, GI, les centres L, M, N, O, des quatre cercles qu'on cherche.

REMARQUE.

Il est aisé à démontrer que chacune des deux lignes PQ, RS, est égale au côté AB du quarré donné ABCD, & que chacune des deux lignes PR, QS, est égale au diametre de chacun des cercles égaux, qui se touchent. On peut encore démontrer aisément que chacun des deux Triangles isosceles rectangles APQ, CRS, est égal au quarré DIEH, ou la quatriéme partie du quarré proposée ABCD : & que le Triangle isoscele rectangle OEN est égal au quarré du rayon OI.

PROBLEME XXVII.

Décrire un Parallelogramme rectangle, dont l'aire exprimée en nombres, soit égale au contour.

TIrez les deux lignes perpendiculaires AB, AD, de telle grandeur, que l'une AB, soit de 3 parties prises sur une Echelle divisée en parties égales, & que l'autre AD soit de 6 parties de la même Echelle. Décrivez du point D, comme centre, & de l'intervalle AB, un arc de cercle vers C, & du point B, comme centre, & de l'in-

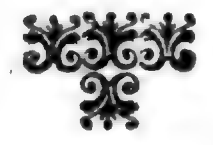
Plan. 8. Fig. 31.

valle AD, un autre arc de cercle, qui coupera le premier au point C. De ce point C vous tirerez les deux lignes CB, CD, qui acheveront le rectangle ABCD, dont l'aire est égale au contour, chacun étant 18.

REMARQUE.

Il n'y a que trois Parallelogrammes rectangles, dont l'aire égale au contour soit exprimée en nombres entiers: ce sont le rectangle qu'on vient de décrire: celui qui a pour côtés des nombres doubles des côtés de celui-ci (12, 6) & le quarré dont le côté est 4. Mais il y a une infinité de Parallelogrammes rectangles exprimées en nombres rompus, dont on peut déterminer les côtés de cette sorte.

Ayant donné au côté AD tel nombre qu'on voudra, plus grand que 2, comme 8, divisez son double 16 par le même côté diminué de 2, c'est-à-dire, par 6: le quotient $\frac{2}{3}$ sera l'autre côté AB. Ainsi on aura en nombres un Parallelogramme rectangle, ayant 8 pour longueur, & $\frac{8}{3}$ pour largueur, dont le contour & l'aire & seront chacun $\frac{64}{4}$, ou 21 $\frac{1}{3}$.



PROB-

PROBLEME XXVIII.

Mesurer avec le chapeau une distance qui n'est accessible qu'en une de ses deux extrêmités.

LA distance à mesurer doit être d'une grandeur mediocre, autrement il seroit difficile de la mesurer exactement avec le chapeau, parce que pour peu que l'on manquât à viser juste, ou à se tenir bien droit, on se tromperoit sensiblement dans sa mesure, sur-tout si le terrein étoit un peu inégal. Plan Fig. 34

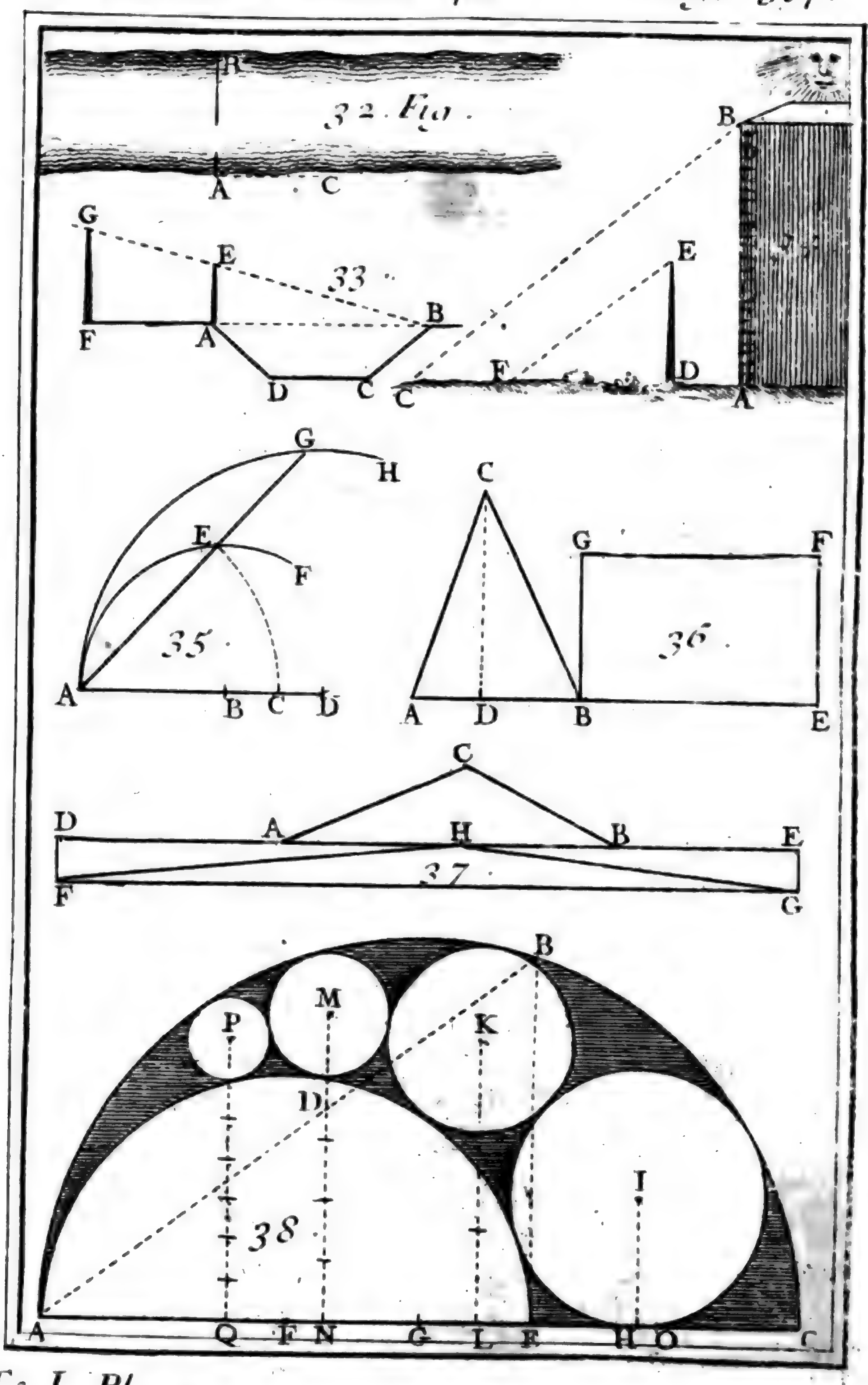
Pour mesurer donc avec le chapeau la distance AB, qui n'est accessible qu'en son extrêmité A, comme seroit la largeur d'une petite riviere, il faut que celui qui la veut mesurer se tienne bien droit à cette extrêmité A, & qu'appuyant son menton sur un petit bâton, qui doit être aussi appuyé sur quelque bouton de son habit, afin que sa tête puisse demeurer en même état, il abbaisse son chapeau sur le front, jusqu'à ce que le bord cache à sa vûë l'extrêmité inaccessible B de la distance à mesurer AB. Après quoi il doit se tourner vers un terrain égal & uniforme, & remarquer en regardant par le même endroit du bord de son chapeau le point de ce terrain où sa vûë se terminera comme en C. Alors en mesurant avec un cordeau, ou avec une chaîne la distance AC, il aura la longueur de la distance proposée AB.

PROBLEME XXIX.

Mesurer une ligne horisontale, qui n'est accessible qu'en l'une de ses deux extrêmités par le moyen de deux bâtons inégaux.

Plan. 9. Fig. 33. POur connoître la longueur de la ligne horisontale AB, qui représente la largeur du fossé ABCD, & qui n'est accessible qu'en son extrêmité A, élevez à plomb en cette extrêmité A, le plus petit bâton AE des deux, dont vous voulez vous servir pour mesurer cette ligne AB. Plantez aussi à plomb l'autre bâton plus grand FG, en ligne droite avec la ligne à mesurer AB, & à telle distance du premier AE, que par les deux bouts E, G, de ces deux bâtons ainsi élevés, vous apperceviez l'autre extrêmité B inaccessible. Après cela mesurez exactement la distance AF, que nous supposerons de 12 pieds, & la longueur des deux bâtons AE, FG, dont le plus petit AE sera supposé de 3 pieds, & le plus grand FG, de 5. De sorte que dans cette supposition l'excès du grand bâton FG, sur le plus petit AE, sera de 2 pieds, comme on le connoît en ôtant 3 de 5. Cet excès 2 sera le premier terme d'une regle de trois directe; 12, ou la distance AF, sera le second; 3, ou le plus petit bâton AE, sera le troisiéme; & la ligne AB, qu'on cherche, sera le quatriéme: elle se trouvera de 18 pieds. Car si on multiplie le second terme 12, qui est la distance AF, par le troisiéme 3, qui est le plus petit bâton AE, & qu'on divise le produit 36 par 2, qui est l'excès du grand bâton FG sur le plus petit AE, on a 18 pieds pour la longueur de la ligne proposée AB.

Digitized by Google



32 . Fig .
B
A
C
G
E
33
B
F
A
D
C
C
B
E
F
D
A
G
H
E
F
35
A
B
C
D
C
G
F
36
A
D
B
E
C
D
A
H
B
E
37
F
G
B
M
P
K
D
I
38
A
Q
F
N
G
L
E
H
O
C

Te. I. Pl. 9.

PROBLEME XXX.

Mesurer une hauteur accessible par le moyen de son ombre.

POur connoître la hauteur accessible AB, par le moyen de son ombre AC, terminée par le rayon BC du Soleil, élevez à plomb le bâton DE d'une longueur prise à volonté, comme de 8 pieds, & mesurez la grandeur de son ombre DF, que nous supposerons de 12 pieds. Mesurez en même tems l'ombre AC, qui soit, par exemple, de 36 pieds. J'ai dit en même tems, parce qu'autrement le Soleil changeant de place à chaque instant, les rayons BC, EF, ne seront plus paralleles; ce qui empêcheroit de pouvoir trouver la hauteur AB par cette regle des trois directe: si 12 pieds de l'ombre DF proviennent d'une hauteur DE de 8 pieds, de quelle hauteur proviendra l'ombre AC de 36 pieds? On trouvera 24 pieds pour la hauteur AB, qu'on cherche: car en multipliant le troisiéme terme 36 par le second 8, & en divisant le produit 288 par le premier 12, on a pour quotient 24, qui est le quatriéme terme proportionnel, ou la hauteur proposée AB. Plan. 9. Fig. 34.

PROBLEME XXXI.

Trouver à trois lignes données une quatriéme proportionnelle.

POur trouver aux trois lignes données AB, AC, AD, une quatriéme proportionnelle, décrivez des deux extrêmités B, D, de la pre- Fig. 35.

miere & de la troisiéme ligne donnée, par l'extrémité commune A, les deux arcs de cercle AEF, AGH; & ayant appliqué sur le premier AEF la ligne AE, égale à la seconde ligne donnée AC, prolongez cette ligne AE jusqu'à ce qu'elle rencontre le second arc AGH, en quelque point, comme en G. Toute la ligne AG sera la quatriéme proportionnelle qu'on cherche.

PROBLEME XXXII.

Décrire sur une ligne donnée un Parallelogramme rectangle, dont l'aire soit double de celle d'un Triangle donné.

Plan. 9. Fig. 36. SI le Triangle donné est ABC, & que la ligne donnée soit BE, élevez à l'extrémité E la perpendiculaire EF, qui soit la quatriéme proportionnelle à la base donnée BE, à la base AB du Triangle donné ABC, & à sa hauteur CD. Achevez le rectangle BEFG, qui sera celui qu'on cherche. Ce Problême n'a été mis que pour résoudre le suivant.

PROBLEME XXXIII.

Changer un Triangle donné en un autre Triangle, dont chaque côté soit plus grand que chaque côté du Triangle donné.

Fig. 37. SI le Triangle donné est ABC, prolongez sa base AB de part & d'autre en D & en E, en sorte que la ligne AD soit égale au côté AC, & la ligne BE au côté BC: & par le moyen du Problême précédent, décrivez sur la ligne DE le Parallelogramme rectangle DEGF, qui soit double

du Triangle donné ABC. Cela étant fait, si l'on prend sur la ligne DE, entre les points A, B, un point à discrétion, comme H, d'où l'on tire aux deux extrêmités F, G, les droites FH, GH, le Triangle FGH sera celui qu'on cherche, c'est-à-dire, qu'il sera égal au proposé ABC, l'un & l'autre étant chacun la moitié du rectangle FGED, & chacun de ses côtés sera plus grand que chacun des côtés du Triangle donné ABC.

REMARQUE.

On peut même avoir un Triangle moindre que le proposé ABC, quoique tous ses côtés soient plus grands que tous les côtés du Triangle ABC, en prenant le sommet H du Triangle FGH au dessous de la base AB.

PROBLEME XXXIV.

Deux demi-cercles, qui se touchent en dedans, étant donnés sur une même ligne droite, décrire un cercle qui touche la ligne droite, & les circonférences des deux demi-cercles donnés.

JE suppose que les deux demi-cercles ABC, ADE, sont posés sur la ligne droite AC, & qu'ils se touchent au point A. Pour décrire un cercle qui touche les deux circonférences ABC, ADE, & la partie EC de la ligne droite AC, portez la longueur du demi-diametre AG, du grand demi-cercle ABC, de F, centre du petit demi-cercle ADE, en O, pour avoir la ligne AO, égale à la somme des demi-diametres AF, AG, des deux demi-cercles donnez ABC, ADE. Elevez

Plan. 9. Fig. 38.

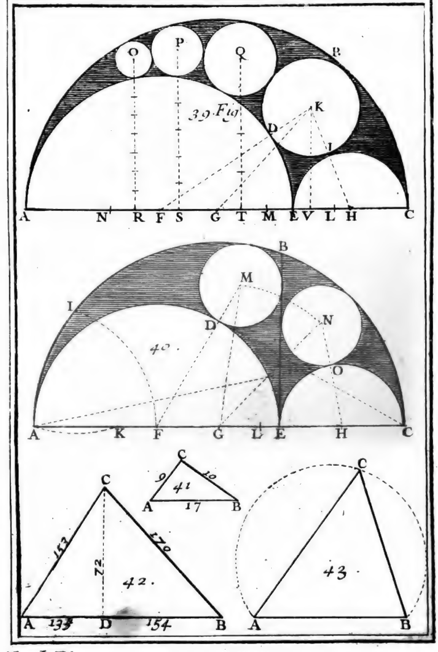
Plan. 9. Fig. 38. au point E, sur AC, la perpendiculaire EB, & joignez la droite AB. Cherchez aux deux lignes AO, AB, une troisiéme proportionnelle AH, pour avoir en H le point d'attouchement du cercle qu'on veut décrire, & de la ligne droite EC. Elevez de ce point H sur EC la perpendiculaire HI quatriéme proportionnelle aux trois lignes AO, AH, FG, pour avoir en I le centre du cercle qu'on cherche, dont la circonference touchera, EC en H, & les circonferences des deux cercles donnés, le plus grand au dedans, & le plus petit au dehors.

REMARQUE.

Si au dedans de l'espace terminé par les deux circonferences ABC, ADE, on décrit un second cercle qui touche le premier décrit du centre I, & les deux circonferences ABC, ADE, & que du centre K de ce second cercle on abbaisse la droite KL perpendiculaire au diametre AC, cette perpendiculaire KL sera triple du rayon du cercle décrit du centre K. Si au dedans du même espace on décrit un troisiéme cercle, qui touche le second décrit du centre K, & les circonferences ABC, ADE, la perpendiculaire abbaissée du centre M de ce troisiéme cercle sur le diamétre AC, sera quintuple du rayon du même cercle. De même, si au dedans du même espace on décrit un quatriéme cercle, qui touche le troisiéme décrit du centre M, & les circonferences des deux demi-cercles, la perpendiculaire abbaissée du centre P de ce quatriéme cercle sur le diametre AC, sera septuple du rayon du même cercle, & ainsi des autres, selon la progression des nombres impairs, 3, 5, 7, 9, &c.

Nous remarquerons ici, que tous les cercles in-

Digitized by Google



To. I. Pl. 10.

Digitized by Google

finis qui peuvent toucher les deux circonférences ABC, ADE, ont leurs centres dans la circonférence d'une Ellipse, dont un Axe est AO, qui a pour Paramétre la ligne AH.

PROBLEME XXXV.

Trois demi cercles qui se touchent en dedans étant donnés sur une ligne droite, décrire un cercle qui touche les circonférences des trois demi-cercles.

SOient les trois demi-cercles ABC, ADE, EIC, dont les centres F, G, H, sont sur la ligne droite AC. Ayant trouvé à la ligne FG, & au rayon AF, une troisiéme proportionnelle AL, cherchez à la somme des deux lignes AL, AG, au rayon AG, & au rayon AF, une quatriéme proportionnelle, qui sera la longueur du rayon KI du cercle que l'on cherche. Portez cette quatriéme proportionnelle KI sur la ligne AC de G en M, & de F en N. Ensuite du centre F & de l'intervalle NE, décrivez vers K un arc de cercle: puis du centre H & de l'intervalle FM, décrivez un autre arc de cercle qui coupera le premier en K. Ce point d'intersection K sera le centre du cercle cherché, qu'il ne sera pas difficile de décrire, puisque son rayon GM, ou FN, est connu. Plan. 10. Fig. 39.

Observez que l'on auroit pû trouver le point d'intersection K, en décrivant le second arc de cercle du centre G & de l'intervalle MC.

REMARQUE.

Si l'on joint le centre K avec les centres F, G, H, des trois demi-cercles donnés, par les lignes droites FK, GK, HK, on aura les deux Triangles FKG, GKH, de même contour, le contour de

chacun étant égal au diametre AC du grand demi-cercle donné ABC, à cause des deux lignes égales AF, GH.

Si entre les deux circonférences ABC, ADE, on décrit, comme dans le Problême précédent, autant de cercles qu'on voudra, qui se touchant mutuellement, touchent aussi les deux circonférences ABC, ADE, & que de leurs centres O, P, Q, K, on tire sur le diametre AC, autant de perpendiculaires, la perpendiculaire KV sera égale au diametre de son cercle; la perpendiculaire QT sera double du diametre de son cercle; la perpendiculaire PS sera triple du diametre de son cercle, la perpendiculaire OR sera quadruple du diametre de son cercle, & ainsi des autres, selon la suite des nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c.

PROBLEME XXXVI.

Trois demi-cercles qui se touchent en dedans étant donnés sur une ligne droite, avec une autre ligne droite tirée par le point d'attouchement des deux demi-cercles intérieurs, & perpendiculaires à la premiere ligne droite, décrire deux cercles égaux qui touchent cette perpendiculaire, & les circonferences des deux demi-cercles.

Plan. 10. Fig. 40. SOient les trois demi-cercles donnés ABC, ADE, EOC, dont les centres F, G, H, sont placés sur la ligne droite AC, qui est coupée à angles droits au point E, par la ligne droite BE. On trouvera le rayon commun aux deux cercles égaux qui doivent toucher la perpendiculaire BE, & les circonférences de deux demi-cercles, en décrivant du point A par le centre F, l'arc de cercle

FI, puis du point I par le point A, l'arc de cercle AK; la ligne KF donnera la longueur du rayon des deux cercles égaux que l'on cherche, dont les centres M, N, se trouveront en cette sorte. Plan. 16. Fig. 40.

Ayant fait la ligne GL égale à la ligne KF, décrivez du centre G & de l'intervalle LC, l'arc de cercle MN, puis du centre F, & de l'intervalle KE, un autre arc de cercle, qui coupant le premier MN, donnera le centre M du cercle, qui doit toucher les circonferences des deux demi-cercles ABC, ADE, & la perpendiculaire EB. Décrivez aussi du centre H & de l'intervalle FL, un autre arc de cercle, qui coupant le premier MN, donnera le centre N du cercle qui doit toucher la perpendiculaire BE, & les deux circonférences ABC, EOC.

REMARQUE.

Si on joint les deux centres M, N, avec les trois F, G, H, par des lignes droites, on aura les deux Triangles FMG, GNH, d'un contour égal; ce contour étant dans chaque Triangle égal au diametre AC du plus grand demi-cercle donné ABC, à cause des deux côtés égaux GM, GN, de la base GH, égale au rayon AF, ou FD, des rayons égaux MD, NO, & de la base FG égale au rayon EH, ou HO. De plus, le rayon MD, ou NO, est quatriéme proportionnel aux trois lignes AG, AF, FG. Enfin si on joint les droites AO, CD, la ligne AO sera perpendiculaire au rayon HO, ou NO, & touchera par conséquent les circonférences de ces deux rayons au point O: la ligne CD sera aussi perpendiculaire à chacun des deux rayons FD, MD, & touchera par conséquent au point D, les circonférences de ces deux rayons,

D'où l'on peut tirer une autre construction pour la résolution du Problême.

PROBLEME XXXVII.

Décrire un Triangle, dont l'aire & le contour soient un même nombre quarré.

Plan. 10. Fig. 41. AYant fait la base AB de 17 parties prises sur une Echelle divisée en parties égales, décrivez de l'extrêmité A, avec l'ouverture de 9 de ces parties, un arc de cercle vers le point C, & un autre arc de cercle de l'autre extrêmité B, avec l'ouverture de 10 des mêmes parties, qui coupera le premier arc de cercle en un point, comme C. Joignez les droites AC, BC, & le Triangle ABC sera celui que l'on cherche, son aire & son contour étant chacun 36, dont la racine quarrée est 6.

REMARQUE.

Ce Triangle a été trouvé en nombres par le moyen de ces deux Triangles rectangles en nombre 72, 135, 153, & 72, 154, 170, qui sont de même hauteur; leurs nombres générateurs sont 12, 3, & 11, 7. Car joignant ensemble ces deux Triangles, on a le Triangle obliquangle ABC, dont la hauteur CD sera 72 à l'égard de la base AB, qui est 289, & en divisant chaque côté par la racine quarrée 17 de cette base 289, on a les trois côtés 17, 10, 9. Fig. 42.

PROBLEME XXXVIII.

Faire passer une circonférence de cercle par trois points donnés, sans en connoître le centre.

IL faut que les trois points proposés ne soient pas dans une même ligne droite, mais qu'ils puissent former un Triangle ACB. Pour décrire une circonférence de cercle, qui passe par les trois points donnés A, C, B, sans en chercher le centre, on commencera par décrire l'arc de cercle AC en cette sorte. Plan. 10. Fig. 43.

Ayant imaginé les lignes AC, CB, on fera avec une carte ou du carton un angle égal à l'angle ACB, dont les côtés CA, CB, soient prolongés vers A & vers B. Après avoir appliqué cet angle de carton ACB sur l'angle ACB, on décrira l'arc CA en abbaissant la pointe C vers A, de façon que le point A soit toujours appliqué le long du côté AC, en même tems que le point B demeurera appliqué le long du côté du carton CB prolongé; le point C par son mouvement décrira l'arc CA.

Le même angle de carton ABC servira à décrire l'autre arc CB : en même tems qu'on abbaissera la pointe C vers B, il faut que le point B demeure appliqué le long du côté CB, & que le point A soit appliqué le long du côté AC prolongé. C'est ainsi que la pointe C décrira l'arc de cercle CB.

Mais pour décrire le troisiéme arc de cercle AB sur le côté AB, on fera un angle de carton égal à l'angle ABC, dont les côtés seront prolongés vers A & vers C. On observera les mêmes précautions que l'on a observées,en décrivant les deux arcs AC CB. La pointe B par son mouvement de B vers A,

décrira un arc soutenu par la ligne AB. Ces trois arcs AC, CB, BA, formeront la circonférence du cercle ACB, que l'on cherchoit, sans en connoître le centre.

REMARQUE.

Pour décrire l'arc AB, au lieu de faire l'angle de carton égal à l'angle ABC, on peut le faire égal à l'angle BAC, & faire mouvoir la pointe A vers B.

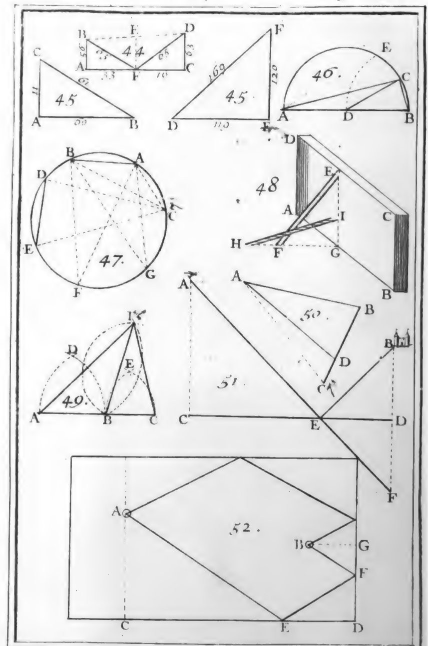
PROBLEME XXXIX.

Deux lignes perpendiculaires à une ligne tirée par leurs extrémités étant données, trouver sur cette ligne aussi donnée, un point également éloigné des deux autres extrémités des deux lignes données.

Plan. 11. Fig. 44. SOient données les deux lignes égales ou inégales AB, CD, perpendiculaires à la ligne AC, qui passe par leurs extrêmités A, C. On trouvera sur cette ligne AC, le point F également éloigné des deux autres extrêmités B, D, en joignant ces deux extrêmités par la droite BD, & en tirant à cette même ligne BD, par E son point du milieu, la perpendiculaire EF, qui donnera sur la ligne AC le point F, que l'on cherche, de sorte que les deux lignes FB, FD, seront égales entr'elles.

REMARQUE.

Ce Problême se propose ordinairement ainsi : *Les hauteurs AB, CD, & leur distance AC étant données, trouver sur le terrein AC le point F, en sorte que les cordes qui seront tendues depuis les*



To. I. Pl. n.

Digitized by Google

sommets B, D, jusqu'au point F, soient égales entr'elles.

Lorsque les hauteurs AB, CD, & leur distance AC seront connues en nombres, comme si la hauteur AB étoit de 56 pieds, la hauteur CD de 63, & la distance AC de 49, on trouvera la partie AF en ôtant de la somme des deux quarrés AC, CD, le quarré AB, & en divisant le reste par le double de AC. De même on trouvera la partie CF, en ôtant de la somme des quarrés AC, AB, le quarré CD, & en divisant le reste par le double de AC. Ainsi la partie AF se trouvera de 33 pieds, & l'autre partie CF de 16: & chacune des deux cordes égales FC, FD, se trouvera de 65 pieds, comme on le connoîtra en ajoutant ensemble les deux quarrés AB, AF, ou bien les deux CD, CF, & en prenant la racine quarrée de la somme 4225.

PROBLEME XL.

Décrire deux triangles rectangles, dont les lignes soient telles, que la différence des deux plus petites du premier Triangle soit égale à la différence des deux plus grandes du second, & réciproquement que la différence des deux plus petites lignes du second Triangle soit égale à la différence des deux plus grandes du premier.

Tirez premierement les deux lignes AB, AC perpendiculaires l'une à l'autre, de telle grandeur que la premiere AB soit de 60 parties prises sur une échelle divisées en parties égales, & la seconde AC de 11 parties. Alors l'hypotenuse BC se trouvera de 61 parties, comme on le connoîtra, en ajoutant ensemble les quarrés AB, AC, & Plan. 11. Fig. 45.

en prenant la racine quarrée de la somme 3721.

Plan. 11. Fig. 43. Tirez ensuite deux autres lignes DE, EF, aussi perpendiculaires l'une à l'autre, dont la premiere DE soit de 119 parties, & la seconde EF de 120. Alors l'hypoténuse DF se trouvera de 169 parties, comme on le connoîtra, en ajoutant ensemble les quarrés DE, EF, & en prenant la racine quarrée de la somme 28561. Les deux Triangles rectangles ABC, DEF satisferont au Problême : car la différence 49 des deux plus petites lignes AB, AC, est égale à la différence des deux plus grandes DF, EF du second DEF. Réciproquement la différence 1 des deux plus petites DE, EF, du second Triangle DEF, est égale à la différence des deux plus grandes AB, BC, du premier ABC.

REMARQUE.

Ces deux différences 49, 1, se rencontrent ici des nombres quarrés, & elles seront toujours telles dans les autres couples de Triangles rectangles qu'on peut trouver par ce Canon général, que j'ai tiré de l'Algebre ; *Le double du produit du plus grand de deux nombres quelconques par leur somme, & la somme des quarrés des deux mêmes nombres, sont les deux nombres générateurs de l'un des deux Triangles rectangles que l'on cherche. Et le double du produit du plus petit des deux mêmes nombres par leur somme & la même somme des quarrés sont les deux nombres générateurs de l'autre Triangle rectangle que l'on cherche.*

De ces trois nombres générateurs, celui qui est commun aux deux Triangles rectangles, est l'hypoténuse d'un troisiéme Triangle rectangle ; l'un des deux autres est le contour de ce troisiéme

Triangle rectangle, & le troisiéme est le même contour, en y changeant le plus grand nombre générateur du troisiéme Triangle rectangle au plus petit.

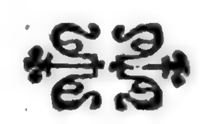
PROBLEME XLI.

Diviser la circonference d'un demi-cercle donné en deux arcs inégaux : en sorte que le demi-diametre soit moyen proportionnel entre les cordes de ces deux arcs.

SI le demi-cercle donné est AEB, dont le centre soit D, décrivez par ce centre D, de l'extrêmité B, du diametre AB, l'arc de cercle DE; & ayant divisé l'arc BE en deux également au point C, tirez les deux cordes AC, BC, entre lesquelles le demi-diametre AD, ou CD, sera moyen proportionnel. Plan. 11. Fig. 46.

REMARQUE.

Il est évident que l'arc BE est de 60 degrés, par conséquent sa moitié BC, ou CE, est de 30 degrés, & l'autre arc AEC de 150 degrés. D'où il est aisé de conclure, que le Sinus d'un arc étant la moitié de la corde d'un arc double, & la moitié du rayon ou Sinus total étant le Sinus d'un arc de 30 degrés, ce Sinus d'un arc de 30 degrés est moyen proportionnel entre le Sinus d'un arc de 15 degrés, & le Sinus de son complement, ou le Sinus d'un arc de 75 degrés.



PROBLEME XLII.

Une Echelle d'une longueur connue étant appuyée par le haut contre une muraille, & en étant éloignée par le pied d'une certaine distance; trouver de combien elle descendra, lorsqu'on l'éloignera davantage du pied de la même muraille.

Plan. 11. Fig. 48. SUpposons que l'Echelle EF, qui est appuyée contre la muraille ABCD, soit longue de 25 pieds, & éloignée du pied de la même muraille de 7 pieds, en sorte que la ligne FG, qui est perpendiculaire à la muraille, soit de 7 pieds. Supposons encore qu'on éloigne cette Echelle de F vers H, de 8 pieds, en sorte qu'ayant la situation HI, la partie FH soit de 8 pieds, & toute la ligne GH par conséquent de 15 pieds; alors l'Echelle sera descendue de la ligne EI, que l'on trouvera en cette sorte.

Multipliez la longueur EF de l'Echelle par elle-même, c'est-à-dire, 25 par 25, pour avoir son quarré 625. Multipliez aussi la longueur FG par elle-même, c'est-à-dire, 7 par 7, pour avoir son quarré 49, qu'il faut ôter du quarré précedent 625. Le reste 576 sera le quarré de la hauteur EG, à cause du Triangle EFG rectangle eu G. C'est pourquoi si on prend la racine quarrée de ce reste 576, on aura 24 pieds pour la hauteur EG.

Multipliez pareillement la longueur HI par elle-même, ou 25 par 25, pour avoir son quarré 625. Multipliez aussi la longueur HG par elle-même, ou 15 par 15, pour avoir son quarré 225, lequel étant ôté du précédent quarré 625, il restera 400 pour le quarré de la hauteur IG. C'est pourquoi si on

on prend la racine quarrée de ce reste 400, on aura 20 pour la hauteur IG. Cette hauteur étant ôtée de la hauteur EG, qui a été trouvée de 24 pieds; le reste donnera 4 pieds pour la ligne EI que l'on cherche.

PROBLEME XLIII.

Mesurer une distance accessible sur la terre par le moyen de la lumiere & du bruit d'un Canon.

FAites avec une balle de mousquet un pendule long de 11 pouces & 4 lignes; en prenant cette longueur depuis le centre de mouvement jusqu'au centre de la balle: & au moment que vous appercevrez la lumiere du Canon, qui doit être au lieu dont vous cherchez la distance du lieu où vous êtes, mettez le pendule en branle, en sorte que les arcs des vibrations ne passent pas 30 degrés. Enfin multipliez par 100 le nombre des vibrations simples qui se feront faites depuis le moment que vous avez apperçu la lumiere jusqu'à celui où vous avez entendu le bruit du coup de canon: le produit donnera en toises de Paris la distance du lieu où vous êtes au lieu où l'on a tiré ce coup de canon.

REMARQUE.

C'est à peu près de la même maniere qu'on pourra mesurer la hauteur d'une nuée, lorsqu'elle est proche du Zenit, & qu'il y fait des éclairs & des Tonnerres; mais cette maniere de mesurer une telle distance est fort incertaine: je ne l'ai indiqué ici que par recréation.

Elle sera plus certaine, lorsqu'on voudra mesu-

rer une médiocre diſtance ſur la terre, dont les extrêmités ſont tellement ſituées, que de l'une on ne peut voir l'autre : mais au lieu du canon, il ſera plus commode de ſe ſervir de l'arquebuſe, dont le ſon ſe porte à la diſtance de 230 toiſes en une ſeconde de tems.

Ainſi, pour meſurer cette diſtance, il faut par le moyen d'une horloge à pendule compter les ſecondes de temps, qui ſe feront écoulées entre la lumiere de l'arquebuſe, qui aura été tirée à l'une des deux extrêmités de la diſtance propoſée, & le ſon qui ſera parvenu aux oreilles d'une perſonne, qui doit être à l'autre extrêmité de la même diſtance; car en multipliant le nombre des ſecondes par 230, on aura en toiſes la longueur de la ligne propoſée.

Il n'eſt point néceſſaire de ſe ſervir des ſecondes d'un pendule ; on peut s'en tenir aux vibrations ſimples du pendule fait avec une balle de mouſquet. Celui qui eſt au pendule tire un coup, en mettant le pendule en branle; l'autre, qui eſt à l'extrêmité de la diſtance à meſurer, tire ſi-tôt qu'il l'entend, & le premier arrête le pendule dès qu'il entend le coup du ſecond. Cette obſervation faite, ſi on multiplie le nombre des vibrations par 100, on a en toiſes le double de la diſtance ; ſçavoir, l'aller & le revenir du ſon; & ſi l'on en prend la moitié, on a la diſtance qu'on vouloit meſurer.

On a déja remarqué qu'en mettant le pendule en branle, il ne falloit pas lui faire décrire un arc plus grand que 30 degrés : on doit ajouter que les 22 vibrations du pendule font une lieue moyenne d France, telle qu'on en compte deux depuis le grand Châtelet de Paris juſqu'à la porte de l'Egliſe de l'Abbaye de S. Denis.

M. de la Hire vouloit que le pendule ne fût long que de 9 pouces, & qu'on en multipliât les vibrations par 90 toises.

Le Pere Schot dit que par plusieurs expériences on aconnu qu'un boulet de gros canon, pointé horisontalement, fait une lieue d'Allemagne de 4000 pas Géométriques en deux secondes de tems; ce qui peut servir aussi pour mesurer une distance sur la terre, s'il est vrai que la vitesse du son est égale à celle du boulet; car ainsi l'on pourra dire que la distance en pas Géométrique est au tems en secondes entre la lumiere & le coup entendu, comme 4000 est à deux, comme 2000 à 1, &c.

PROBLEME XLIV.

Mesurer la surface d'un Parallelogramme.

I.

Soit un Parallelogramme rectangle ABCD, dont l'un des côtés AB est de 8 toises, & l'autre AC est de 6 toises, on veut sçavoir combien il contient de toises dans sa surface. Il suffit pour cela de multiplier le côté AB, 8, par le côté AC, 6, le produit 48 est le nombre des toises que contient la surface du Parallelogramme rectangle ABCD. Plan. 1. Fig. 2.

II.

Si le Parallelogramme est obliquangle, comme EIFH, dont un des côtés EF est de 3 toises, & l'autre FH est de 10; du sommet de quelqu'un des angles, comme de E, il faut abbaisser la perpendiculaire FG, qui se trouve être ici de 2 toises, on multipliera ces 2 toises par les 10 que com- Plan. 2. Fig. 3.

tient le côté FH, sur lequel on a abbaissé la perpendiculaire : le produit 20 est le nombre des toises que contient la surface du Parallelogramme obliquangle EIFH.

Procès à décider.

Plan. 1. Fig. 4 & 5. Caius avoit un champ parfaitement quarré, dont chaque côté étant de 6 toises, le circuit par conséquent étoit de 24 toises. Sempronius voulant s'en accommoder, il propose à Caius de l'échanger pour une piece de terre qui avoit aussi 24 toises de circuit, mais qui n'étoit point parfaitement quarrée : c'étoit un Parallelogramme rectangle, dont un des côtés avoit 3 toises de large, & l'autre avoit 9 toises de long.

Caius ne sçavoit point de Géométrie, & il avoit été trompé par le raisonnement captieux de Sempronius, qui lui assuroit que les figures qui ont un même circuit, sont égales entr'elles. Dans la suite ses amis lui firent connoître qu'il avoit été la dupe de Sempronius, qui lui avoit donné un champ qni ne contenoit que 27 toises, en échange d'un qui en contenoit 36.

La contestation fut portée devant le Juge du lieu, qui après avoir pris l'avis d'un Arpenteur, déclara que Caius avoit été surpris, & par conséquent que l'échange étoit nul.

REMARQUES.

Entre deux quarrés parfaits, dont l'un a le côté double du côté de l'autre, celui-là est quadruple de celui-ci. Qu'on propose deux quarrés, dont l'un ait pour côté 6 pieds, & l'autre 3, le quarré qui a 6 pour côté, est quadruple de celui qui a 3

pour côté; car le premier contient 36 pieds de surface, le second en contient 9, qui est le quart de 36.

PROBLEME XLV.

Mesurer la surface d'un Cercle.

IL faut connoître le diamétre du cercle, & sa circonférence; multiplier le demi-diamétre ou rayon par la moitié de la circonférence, ou bien toute la circonférence par le quart du diamétre; le produit sera la surface du cercle.

Voyez le Probl. XII page 265.

I.

Si l'on n'avoit que le diamétre d'un cercle, & qu'il fut difficile de mesurer sa circonférence, il faudra, pour l'obtenir, faire une regle de trois, dont le premier terme sera 7, le second 22, & le troisiéme sera le diamétre du cercle dont on cherche la surface. La regle étant faite, on aura pour quatriéme terme la circonférence du même cercle. On sçait, par exemple, que le diamétre d'un bassin est de 28 pieds; pour avoir sa circonférence il faut multiplier 28 par 22, & diviser le produit 616 par 7, le quotient 88 est le nombre des pieds que contient la circonférence de ce bassin. Ainsi pour avoir sa surface, on multipliera 44 moitié de sa circonférence par 14 moitié du diamétre, ou toute la circonférence 88 par 7 quatriéme partie du diamétre 28; le quotient 616 donnera le nombre des pieds de la surface du cercle.

I I.

Au contraire il peut arriver qu'on connoisse la circonférence, sans connoître le diamétre du cercle, pour lors il faut faire une regle de trois, dont

le premier terme fera 22, le fecond 7, & le troifiéme fera la circonférence connue: la regle faite donnera un quatriéme terme, qui fera le diamétre cherché.

On a mefuré le circuit d'une Tour que je fuppofe être 88 toifes: pour avoir fon diamétre on multipliera 88, circuit de la Tour par 7, & l'on divifera le produit 616 par 22; le quotient 28 fera le nombre des toifes que contiendra le diametre de la Tour.

III.

On peut encore avoir la furface d'un cercle en faifant cette regle de trois: comme 14 eft à 11, ainfi le quarré du diamétre du cercle eft à un quatriéme nombre, qui fera la furface du cercle cherché.

REMARQUES.

Ce qu'on a remarqué des quarrés doit auffi s'entendre de deux cercles, dont l'un auroit le diamétre double du diamétre de l'autre: je veux dire que celui qui a le diamétre double, a une furface quadruple de la furface de l'autre. Si, par exemple, un cercle a 6 pieds de diamétre, & qu'un autre en ait trois, la furface de celui qui a 6 pieds de diamétre, eft à la furface de celui qui a 3 pieds de diamétre, comme 36 à 9 ou 4 à 1. On doit appliquer à la circonférence ou au circuit, ce qu'on vient de dire du diamétre.

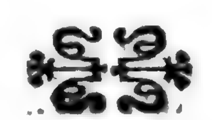
Digitized by Google

QUESTION I.

Une Cuisiniere étant allée au marché, convient qu'on lui donnera pour un certain prix autant de bottes d'Asperges qu'elle én pourra lier avec une ficelle d'un pied de long; il se trouve qu'elle en a en quatre bottes. Le lendemain ayant besoin d'une plus grande quantité d'Asperges, elle retourne an marché, avec une ficelle longue de deux pieds. Elle offre le double du prix qu'elle a donné le jour précédent, pour avoir autant de bottes d'Asperges qu'elle en pourra lier avec la ficelle de deux pieds de long. On demande si elle n'auroit que 8 bottes d'Asperges.

SUivant les remarques précédentes, elle doit avoir seize bottes d'Asperges; car la ficelle étant double, elle fait un quarré ou un cercle, dont le circuit est double: par conséquent la surface en sera quadruble; c'est-à-dire, que le lien qui est double contiendra quatre fois plus que le simple.

La méthode, pour résoudre ces sortes de questions, est de faire une regle de trois, dont le premier terme est le quarré de la chose proposée, le second la chose qui est contenue, & le troisiéme le quarré de la chose dont on veut sçavoir le contenu. Comme dans cet exemple, si 1 quarré de 1 mesure du lien, donne 4 bottes d'Asperges, combien 4 quarré de 2 mesure du second lien, dont on veut sçavoir le contenu?



QUESTION II.

Une corde de 10 pieds de long entoure 200 piques; on veut sçavoir combien une corde de 8 pieds de long entourera de piques.

ON trouvera par la regle qu'on vient de proposer, que la corde de 8 pieds entourera 128 piques, en faisant cette regle de trois : si 100 quarré de 10 donne 200, combien 64 quarré de 8, longueur de la corde, dont il est proposé de connoître ce qu'elle doit contenir de piques.

QUESTION III.

Sempronius a emprunté de Caius un sac de blé qui avoit 5 pieds de haut & 4 pieds de large: quand il fallut rendre le blé, Sempronius prit quatre sacs hauts de 5 pieds, & larges d'un pied seulement. Sempronius rendit-il à Caius tous le blé qu'il avoit emprunté?

IL s'en faut de beaucoup, Sempronius ne rendit que le quart du blé que Caius lui avoit prêté.

QUESTIONS IV. V. VI.

ON ne fera que proposer les questions suivantes: il sera aisé de résoudre, par les principes qu'on a posé, non-seulement celles qu'on va lire, mais encore plusieurs autres qui sont de la même nature.

Un Particulier a pour son usage un pouce d'eau; il reçoit du Magistrat la permission d'en avoir une fois davantage: il n'y a point de doute que si ce

Particulier faisoit faire un tuyau qui eût deux pouces de diametres, il auroit quatre fois plus d'eau.

Une vieille ayant acheté des marons plein un sac pour un certain prix ; elle en demande pour le prix double dans un sac qui a deux fois plus d'étoffe dans son circuit, quoiqu'il soit de la même hauteur que le premier, elle aura quatre fois plus de marrons.

Si on défonce deux futailles, & qu'on en fasse une seule des douves de ces deux futailles, la futaille faite des deux contiendra quatre fois plus de vin que l'une des deux n'en contenoit.

PROBLEME XLVI.

Tracer un ovale sur le terrein.

L'Ovale a deux diamétres, dont l'un CD est plus grand que l'autre EG. Sur le plus grand CD on choisit deux points A, B, qu'on appelle foyers, qui sont également éloignés des extrêmités C, D, du grand diamétre. On plante à ces deux points deux jalons ou piquets, ausquels on attache un cordeau AHB : ce cordeau doit être de la même grandeur que le diamétre CD : on le replie avec un troisiéme jalon, ou un bâton tel que vous voyez en H, & l'on conduit ce bâton, en tenant toujours le cordeau également tendu, depuis C par HE jusqu'en D. Ensuite on repasse le cordeau de l'autre côté du diametre CD, on trace de la même façon l'autre côté CGD, & l'on a un ovale CEDG tracé sur le terrein. On l'appelle l'ovale du Jardinier, parce que c'est de cette maniere que les Jardiniers le tracent. Plan. 13 Fig. 6.

REMARQUE.

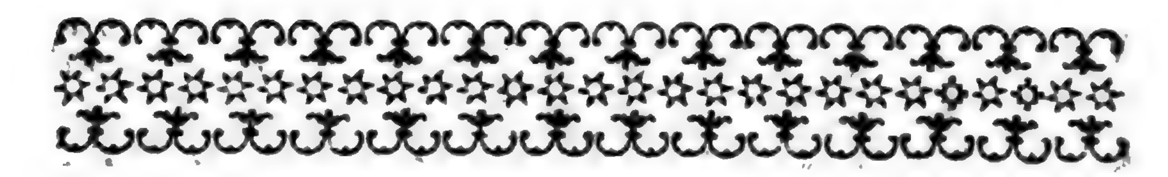
Si on vouloit tracer un cercle, au lieu de mettre deux jalons A, B, aux foyers de l'ovale, il suffiroit d'en mettre un en C, centre du cercle, on plieroit un cordeau de la longueur du rayon CD, on y attacheroit un jalon en D, & l'on feroit mouvoir ce cordeau autour du jalon planté en C, de maniere que le jalon D traceroit un cercle en tenant toujours le cordeau également tendu.

PROBLEME XLVII.

Mesurer la surface d'un ovale.

APrès avoir multiplié les deux diamétres, vous ferez une regle de trois, dont le premier terme sera 14, le second 11, & le troisiéme sera le produit des deux diamétres de l'ovale dont on cherche la surface. Comme si le grand diamétre CD est de 16 pieds, & que le petit soit de 9 pieds, on multipliera 9 par 16, le produit sera 144. Ensuite on divisera par 14 le produit 1584 de 144 par 11, & le quotient 113 $\frac{1}{7}$ sera la surface de l'ovale CEDG.

Plan. 2. Fig. 6.



PROBLEMES DE MUSIQUE.

LA Musique a pour objet le son en tant qu'il est agréable à l'organe de l'ouie. Le son est causé par les vibrations & frémissemens du corps sonore, ou de ses parties, qui étant ordinairement transmis à l'oreille par le moyen de l'air, excitent une sensation agréable ou désagréable. On peut considérer un son seul, ou comparer plusieurs sons ensemble.

L'impression qu'un seul son cause à l'oreille est forte ou foible ; elle peut aussi être plus vive ou moins vive.

Lorsque deux ou plusieurs corps sonores forment des sons, si les vibrations des uns & des autres sont telles qu'elles s'accordent ensemble de tems en tems, & par conséquent leurs impressions, cette union d'impressions s'appelle *accord*. Cet accord peut donc être exprimé par des nombres, puisque ce n'est que le rapport du nombre des vibrations d'un autre corps sonore entre les unions d'impressions. Si, par exemple, deux sons réunissent leurs impressions dans un certain tems après cinq vibrations de l'un & six de l'autre, ce rapport de 5 à 6 des vibrations de ces deux corps sonores, exprimera un accord.

Les accords se divisent en consonnances & en dissonnances. Les consonnances sont des accords

agréables à l'ouie par eux-mêmes, on les exprime par de petits nombres, comme de 2 à 3. Les dissonances sont des accords qui sont désagréables; on les exprime par de grands nombres, comme de 15 à 16.

On considere donc dans la Musique, 1°. Le son qui se divise en tons & en demi-tons. 2°. La durée de ces tons & demi-tons, qui est ce qu'on appelle la *Mesure*. 3°. Les accords de ces tons ou demi-tons, avec d'autres qui en sont éloignés dans de certaines distances, & qui frappent l'oreille de différens tons en même tems; ce qui s'appelle *Harmonie*.

Les accords peuvent encore être exprimés par des cordes également grosses & également tendues: par exemple, cet accord $\frac{3}{2}$ peut être marqué par la longueur de deux cordes également grosses & tendues; de sorte que la longueur de la corde qui fait le son plus grave aura trois parties: telle que la corde qui fait le son plus aigu en aura deux; car il est à remarquer que les vibrations des cordes sont en raison réciproque de leurs longueurs, c'est-à-dire, que la corde qui a trois parties, fait deux vibrations, & par conséquent un son plus grave, tandis que celle qui a deux parties fait trois vibrations, & par conséquent un son plus aigu.

Digitized by Google

PROBLEME I.

Faire sur les accords les quatre opérations de l'Arithmetique.

I.

POur ajouter deux accords $\frac{3}{2}$, $\frac{6}{5}$; on multipliera les numérateurs ensemble & les dénominateurs ensemble; le produit $\frac{18}{10}$ ou $\frac{9}{5}$ est la somme des accords proposés.

II.

Pour ôter un accord $\frac{6}{5}$ d'un autre $\frac{3}{2}$, on renversera les termes de l'accord à ôter $\frac{6}{5}$, en écrivant $\frac{5}{6}$, on ajoutera ensemble les accords $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{6}$, la somme $\frac{15}{12}$ ou $\frac{5}{4}$, sera la différence des deux accords proposés.

Remarquez que si l'on ôtoit un grand accord $\frac{3}{2}$ d'un petit $\frac{6}{5}$, on auroit $\frac{12}{15}$ ou $\frac{4}{5}$, qui est le même accord que le précedent, mais renversé.

III.

Pour multiplier un accord, on prendra les puissances des deux termes de cet accord. Si on veut doubler l'accord $\frac{3}{2}$, on prendra le quarré $\frac{9}{4}$: si on veut le tripler, on prendra le cube $\frac{27}{8}$, & ainsi des autres.

IV.

Pour diviser un accord, on prendra la racine quarrée, cubique, &c. de cet accord. Ainsi pour

avoir la moitié de l'accord $\frac{9}{4}$, il en faut prendre la racine quarrée $\frac{3}{2}$. De même, pour avoir le tiers de l'accord $\frac{27}{8}$, ou, ce qui est la même chose pour le diviser par 3, il en faut prendre la racine cubique, qui est $\frac{3}{2}$, &c.

Si on proposoit de diviser en quatre parties cet accord $\frac{16}{15}$, qui n'est point une quatriéme puissance, il faudroit multiplier les termes de cet accord par 4, on auroit $\frac{64}{60}$, & prendre entre 64, 60, deux autres termes qui eussent la même différence que les termes proposés, comme $\frac{63}{62}$, qui sera sensiblement le quart de l'accord $\frac{16}{15}$. De même, pour diviser l'accord $\frac{33}{31}$, en 7 parties, on multipliera ces nombres par 7, & l'on aura $\frac{231}{217}$, entre lesquels on prendra $\frac{225}{223}$, qui sera sensiblement la septiéme partie de l'accord proposé. Ainsi des autres.

PROBLEME II.

Exprimer les accords par Logarithmes.

POur avoir l'accord $\frac{3}{2}$ en Logarithmes, on cherchera les Logarithmes de 3 & de 2, qui sont $\frac{0.\,1771212}{0.\,3010300}$, ou en retranchant les trois derniers chiffres des Logarithmes, on aura $\frac{0.\,4771}{0.\,3010}$, & en ôtant le petit Logarithme du grand, on aura $\frac{0.\,1716}{0.\,0000}$, ou simplement 0. 1761, qui exprimera en Logarithmes l'accord $\frac{3}{2}$.

REMARQUE.

Quand on a les accords exprimés en Logarithmes, on peut les ajouter & les soustraire par la regle ordinaire, c'est-à-dire, par l'addition & la soustraction. Comme si l'on avoit ces deux Loga-

rithmes 0. 1249 ($\frac{4}{3}$) 0. 1616 ($\frac{3}{2}$) on aura aussi leur somme 0. 3010. en les ajoutant ensemble, & leur différence 0. 0512 en ôtant 0. 1249 de 0. 1761. Mais pour multiplier un accord, il faut multiplier le Logarithme par le nombre proposé: ainsi pour quadrupler l'accord 0. 1761 ($\frac{3}{2}$) on multipliera 0. 1761 par 4, & le produit 0. 7044 est le quadruple de l'accord proposé $\frac{3}{2}$. Au contraire, pour diviser un accord 0. 3010 ($\frac{2}{1}$) en douze parties, on prendra la douziéme partie du Logarithme 0. 0310, qui est 0. 0251.

PROBLEME III.

Partager l'intervalle de l'Octave en sept autres intervalles simples, qui sont les Tons & demi-Tons.

LE plus simple de tous les accords s'exprime par ce rapport $\frac{1}{1}$; il s'appelle l'Unisson: le rapport suivant $\frac{2}{1}$ s'appelle Octave. L'Unisson & l'Octave ont tant de rapport ensemble, que les Musiciens les prennent indifféremment l'un pour l'autre. Cet autre rapport $\frac{4}{1}$ s'appelle double Octave; celui-ci $\frac{8}{1}$ se nomme triple Octave, & ainsi de suite.

L'Octave peut-être divisée de deux manieres, numériquement ou géométriquement: on donnera ces deux divisions dans les deux articles suivans.

I.

Pour diviser l'Octave numériquemont. 1°. Doublez les termes de l'Octave $\frac{2}{1}$, vous aurez $\frac{4}{2}$; prenez le nombre 3, qui est entre les termes 2, 4,

formez en deux rapports avec les mêmes termes, 4, 2, & l'Octave se trouvera divisée en $\frac{3}{2}$, qui est la Quinte, & $\frac{4}{3}$, qui est la Quarte.

2o. Doublez les termes de la Quinte $\frac{3}{2}$, vous aurez $\frac{6}{4}$, prenez le nombre 5, qui est entre ces termes, 4, 6, formez-en deux autres rapports avec les mêmes termes 4, 6, & la Quinte sera divisée en $\frac{5}{4}$, qui est la Tierce majeure, & $\frac{6}{5}$, qui est la tierce mineure.

3o. Doublez les termes de la Tierce majeure $\frac{5}{4}$, vous aurez $\frac{10}{8}$; prenez le nombre 9, qui est entre ces termes, 8, 10, formez-en deux rapports avec les mêmes termes, 8, 10, & la Tierce majeure se trouvera divisée en $\frac{9}{8}$ qui est le Ton majeur, & $\frac{10}{9}$ qui est le Ton mineur. Ces deux Tons sont les premieres dissonances nées de ces divisions.

4°. Pour trouver la division de la Quarte $\frac{4}{8}$, ôtez-en * la Tierce majeure $\frac{5}{4}$, le reste sera le demi-Ton majeur $\frac{16}{15}$: ainsi la Quarte contiendra la Tierce majeure $\frac{5}{4}$, & le demi-Ton majeur $\frac{16}{15}$.

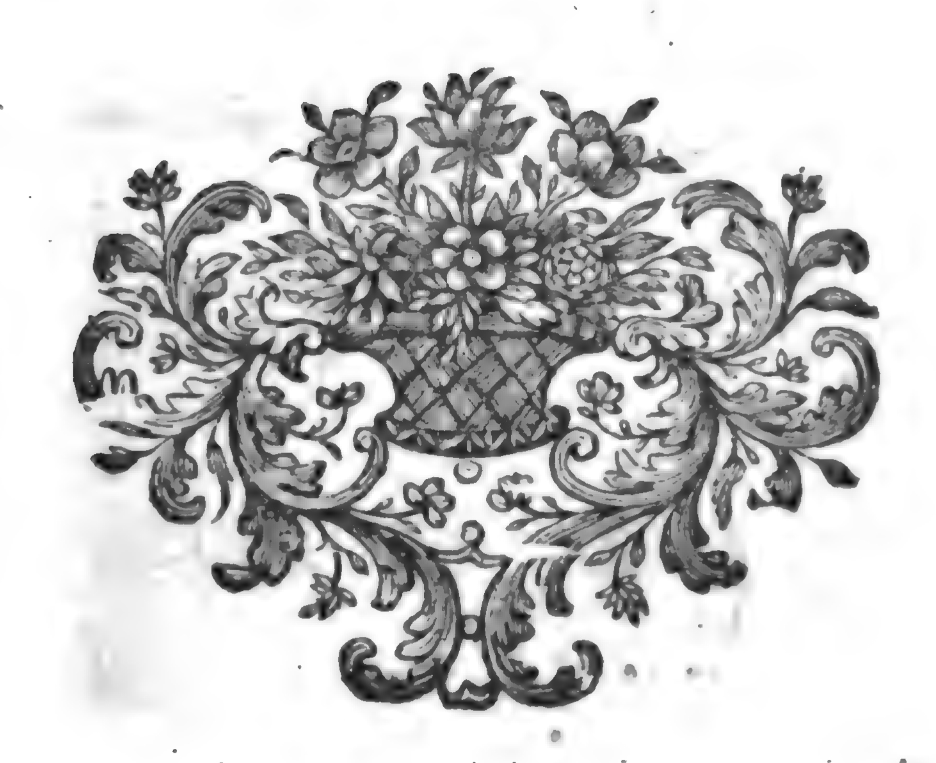
* Problême I. Art. II. p. 333.

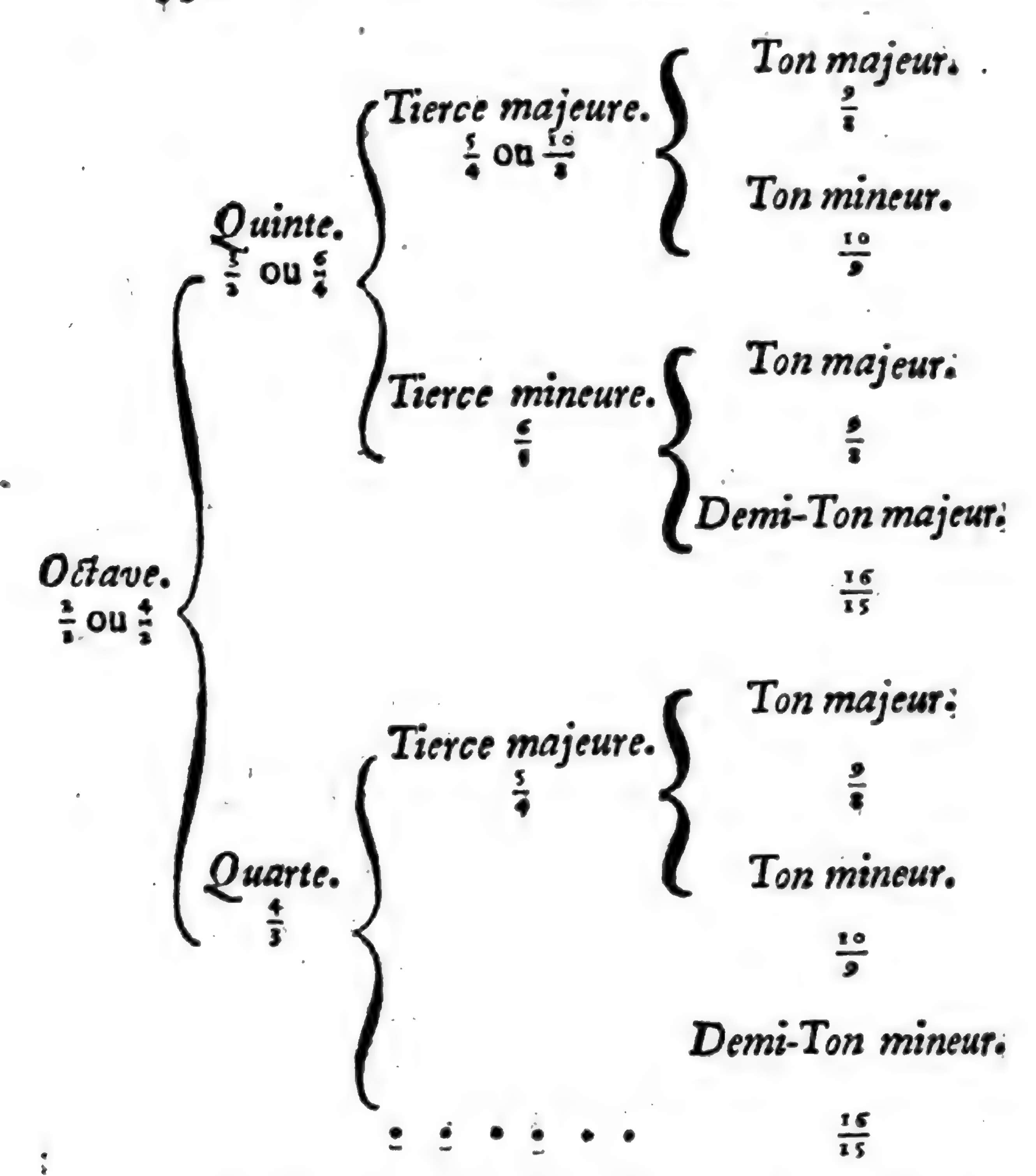
5°. Pour connoître la division de la Tierce mineure $\frac{6}{5}$, ôtez-en le Ton majeur $\frac{9}{8}$, le reste sera le demi-Ton majeur $\frac{16}{15}$, & de cette maniere la Tierce mineure contiendra le Ton majeur $\frac{9}{8}$, & le demi-Ton majeur $\frac{16}{15}$.

Ainsi l'Octave se divisant en Quinte & Quarte; la Quinte se divise en Tierce majeure, & en Tierce mineure: la Tierce majeure en Ton majeur & en Ton mineur; & la tierce mineure en Ton majeur & en demi-Ton majeur. De même la Quarte se divise en Tierce majeure & en demi-Ton majeur; cette Tierce majeure a déja été divisée en Ton majeur & en Ton mineur; par conséquent l'Octave contient trois Tons majeurs, deux Tons mineurs & deux demi-Tons majeurs.

C'est

C'eſt ce qu'on comprendra mieux en jettant les yeux ſur la Table qu'on a joint ici, où toutes les diviſions que contient l'Octave ſe trouvent les unes ſous les autres dans la derniere colomne à main droite. Ce qu'on dira dans l'article ſuivant ſervira encore d'éclairciſſement à ce qu'on vient de dire.

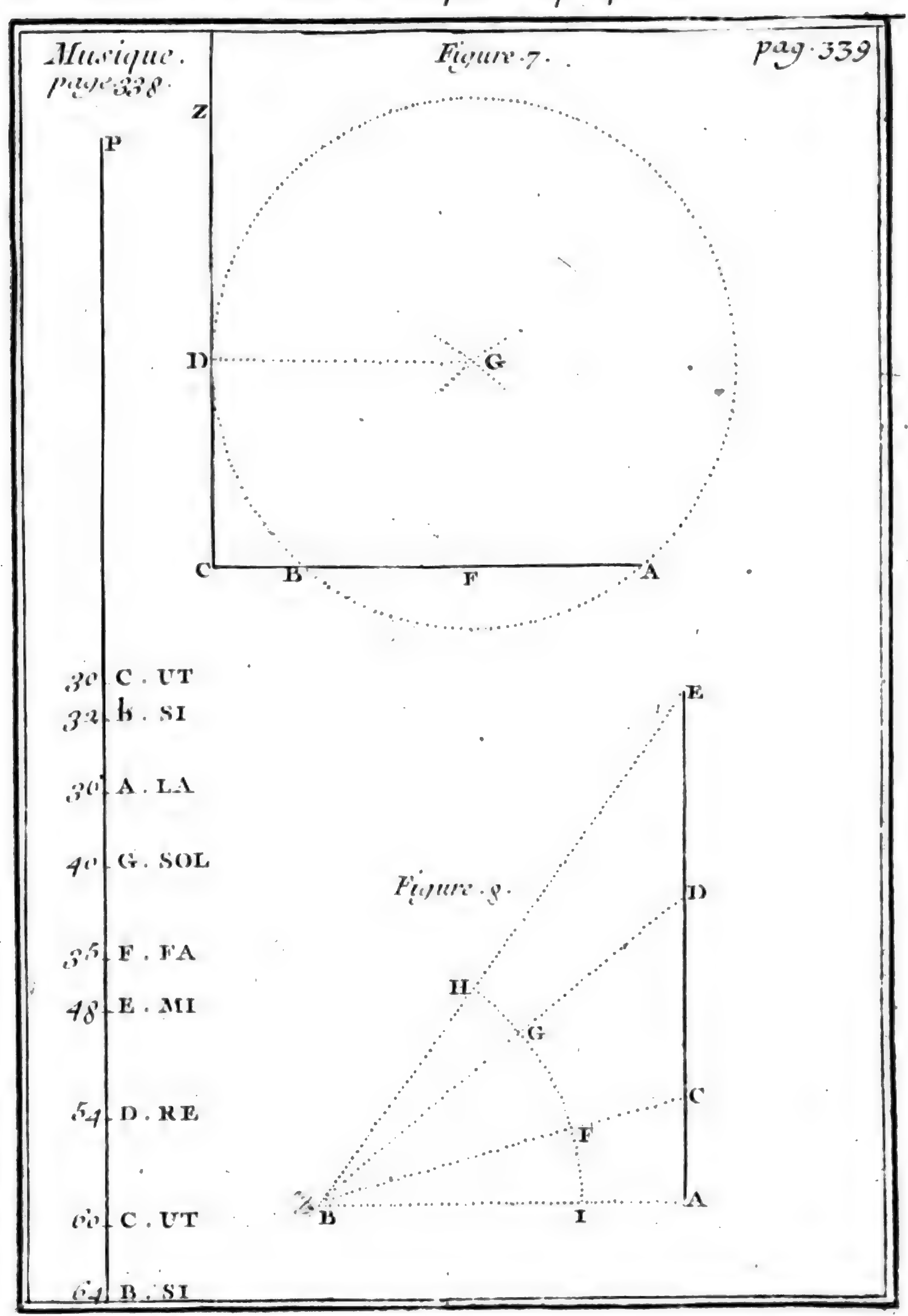




Après avoir donné la division de l'Octave en nombres, on va le donner géométriquement en l'appliquant à une corde.

II.

Plan. 12. Pour diviser l'Octave géométriquement, soit PB une corde tendue, & de telle longueur qu'il vous plaira. 1°. Divisez-la également en b, le point b marquera l'Octave, c'est-à-dire, que si l'on mettoit un chevalet en b, la partie Pb fera



Musique. page 338.
Figure 7.
pag. 339
Z
P
D
G
C
B
F
A
30 C . UT
32 ♮ . SI
36 A . LA
40 G . SOL
45 F . FA
48 E . MI
54 D . RE
60 C . UT
64 B . SI
Figure 8.
E
D
H
G
C
F
Z
B
I
A

l'Octave avec toute la corde PB. Pour mieux entendre ce qui vient d'être dit, il faut concevoir que s'il y avoit deux cordes également grosses & tendues, dont l'une fût égale à PB, & l'autre à Pb ; PB ayant été pincée, feroit une vibration, tandis que Pb en feroit deux, suivant ce qu'on a dit ci-dessus. On doit supposer la même chose dans la suite.

Il faut faire attention que les deux moitiés de la corde séparées par le chevalet forment l'unisson qu'on a dit être exprimée par ce rapport $\frac{1}{1}$.

2°. Divisez bB également en E, alors PE fera la Quinte avec Pb, & la Quarte avec PB.

3°. Partagez également bE en G, alors PG fera la Tierce majeure avec Pb, & le Ton mineur avec PG.

4°. Divisez bG également en A, alors PA fera le Ton majeur avec Pb, & la Tierce mineure avec PE.

5°. Partagez PG en huit parties égales, & faites GF égale à une de ces huit parties, alors PF fera un Ton majeur avec PG, & un demi-Ton majeur avec PE.

6°. Divisez PE en quatre parties égales, portez-en une en EC, alors PC fera avec PB un demi-Ton majeur, & avec PE une Tierce majeure. Cette quatriéme partie est la distance AE.

7°. Divisez EC également en D, alors PD fera le Ton majeur avec PE, & le Ton mineur avec PC.

L'Octave se trouve ainsi divisée en 7 intervalles ou 7 accords, qui sont trois Tons majeurs, deux Tons mineurs & deux demi-Tons majeurs. Si on prend Pc moitié de PC, qui est son Octave, au

lieu des divisions de l'Octave Bb, on aura l'Octave Cc, qui contiendra les mêmes intervalles.

REMARQUES.

On a ajouté aux divisions qu'on vient de faire de la corde PB, des nombres, qui étant comparés les uns aux autres, suivant ce qu'on vient de dire, expriment les accords qu'on a trouvé dans l'article précédent. On a d'abord l'Octave $\frac{64}{32}$, & les autres accords comme la Quinte $\frac{48}{32}$, la Quarte $\frac{64}{48}$, &c. Mais en prenant 30, moitié de 60, au lieu d'avoir l'Octave de 32 à 64, on a l'Octave de 30 à 60.

L'Octave & ses divisions prises entre les nombres 30 & 60, s'accorde avec les noms particuliers qu'Aretin, Moine Benedictin, a donné aux sons différens de ces divisions. On les a marqué dans la figure, quoiqu'ils soient assez connus ; on sçait qu'ils ont été tirés des premieres syllabes de chaque hemistiche de l'Hymne de S. Jean.

UT queant laxis, REsonare fibris,
MIra gestorum FAmuli tuorum,
SOLve polluti LAbii reatum,
Sancte Joannes.

Si on double les nombres qui sont entre 30 & 60, on aura une seconde Octave divisée en ses accords : on auroit une troisiéme Octave en doublant les nombres de cette seconde Octave ; & ainsi de suite pour avoir autant d'Octaves qu'on voudra.

Digitized by Google

PROBLEME IV.

Mesurer la durée des Tons.

POur mesurer le tems qu'on employe à marquer les Tons selon leur durée, il faut concevoir un mouvement précipité très-égal, comme le battement de l'artere, ou la vibration d'un pendule, & comptant 1, 2, 3, 4, recommencer toujours à compter de quatre en quatre, afin de se faire une juste idée de ce qu'on appelle un Temps de la Musique.

On doit ensuite s'accoutumer la main droite à marquer un mouvement à peu près semblable à celui qui vient d'être expliqué, en l'abbaissant & comptant un; en l'élevant un peu en dehors, & comptant deux; puis trois en la retirant un peu vers soi; enfin quatre, en l'élevant un peu au dessus de l'endroit où elle étoit au premier Temps, observant que les quatre divers mouvemens soient égaux, on la replacera également où elle étoit au premier: d'où on recommencera à compter 1, 2, 3, 4. Il est nécessaire de s'habituer à ce mouvement, qui sert de base à tous les autres qui se font dans la Musique, ou qui en dépendent.

REMARQUES.

Outre ce mouvement reglé de quatre en quatre, il y a encore une autre mesure qui se regle de trois en trois; en sorte qu'après avoir compté un en baissant la main, on compte deux, comme au second Temps de la Mesure ci-devant; mais le troisiéme se compte en élevant la main: après quoi

on recommence à compter 1, 2, 3, comme la premiere fois ; & ainsi de suite.

La durée d'un Ton est reglée par un ou plusieurs de ces Temps, ou par la moitié, le quart ou la douziéme partie d'un temps, ainsi qu'on le marque par les notes ou caracteres qui sont usités dans la Musique.

PROBLEME V.

Faire trembler sensiblement & à vûe d'œil la corde d'une Basse de Viole, ou de quelqu'autre Instrument, sans que personne y touche.

PRenez une Basse de Viole, ou autre semblable Instrument de Musique ; choisissez deux cordes tellement éloignées l'une de l'autre, qu'il y en ait une entre deux : accordez ces deux cordes, sans toucher à celle du milieu. Ensuite touchez un peu fort avec l'archet sur la plus grosse corde, & vous verrez qu'en même temps que celle-ci tremblera, celle qui en est éloignée, mais accordée au même Ton, tremblera aussi sensiblement, sans qu'on y touche. Ce qui est très-remarquable, c'est que la corde qui sera au milieu n'aura aucun mouvement, & qu'aussi-tôt qu'on aura mis la grosse corde sur un autre Ton, en lâchant ou serrant la cheville, ou bien en mettant le doigt sur quelque endroit de cette corde, l'autre ne tremblera plus. La chose paroîtra encore plus merveilleuse, si on l'execute sur deux Basses de Viole.

REMARQUES.

Cette merveille ne vient que de ce que ces deux cordes sont tellement tendues, que les vibrations

Digitized by Google

de l'une répondent aux vibrations de l'autre, en ſorte que la premiere étant ébranlée, la ſeconde ſe trouve auſſi ébranlée par l'entremiſe de l'air, qui reçoit les mêmes frémiſſemens que la groſſe corde, & les communique à l'autre par des vibrations qui leur conviennent ; au lieu que la corde du milieu n'étant point accordée avec les deux autres, n'eſt pas ſuſceptible des mêmes vibrations, & par conſéquent ne reçoit aucun mouvement.

On remarque le même effet ſur deux verres que l'on met à l'uniſſon, en verſant de l'eau peu à peu dans celui qui a le ſon plus clair : ſi on frotte le bord de l'un de ces verres avec le doigt mouillé, en ſorte que l'on forme un ſon par ce frottement, l'autre verre, qui doit être aſſez proche, ſera ébranlé : ce que l'on connoîtra par le mouvement d'une épingle tortuée qu'on mettra ſur le bord.

De même ſi deux Timbales ſont à l'uniſſon, & que l'on frappe l'une des deux avec leur bâton, on fera ſauter de la monnoye qu'on aura miſe ſur l'autre. On obſerve encore qu'en battant du Tambour, les vitres qui ſont à l'uniſſon, en ſont ébranlées, & que dans les lieux où l'on joue d'une Baſſe de Violon, ou de quelque autre Inſtrument fort, en mettant la main ſur des planches, ſur la forme d'un chapeau, ou ſur d'autres corps un peu fermes & minces, on les fait frémir, lorſque l'on produit le ſon ſur des cordes qui ſont à l'uniſſon avec ces corps.

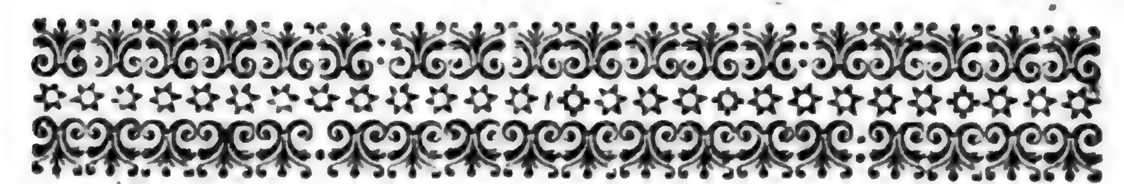
On ajoutera ici comme une choſe très-curieuſe, que deux pendules poſées ſur une même tablette, s'accorderont à aller à la même heure, quoique leurs aiguilles n'ayent point été miſes d'abord à la même heure.

AVERTISSEMENT.

M. Sauveur a inventé un syſtême de Muſique ; il diviſe l'Octave en 43 parties, qu'il appelle Merides, & ces Merides ſont encore diviſées en ſept Heptamerides, de ſorte que l'Octave contient 301 Heptamerides : Il exprime tous les accords par Merides & Heptamerides, & il donne des noms de lettres aux différens ſons de l'Octave. Ainſi au lieu de UT, RE, MI, FA, SOL, LA, SI, UT, il a imaginé ſept noms PA, RA, GA, FO, BO, LO, DO, PA, qu'il applique aux ſept ſecondes de l'Octave, dont chaque Ton contient 7 Merides, chaque demi-Ton 4 Merides. Pour exprimer les Merides & les Heptamerides, & pour varier les Tons, il change les voyelles de cette Gamme en d'autres voyelles, ſelon qu'il veut abbaiſſer ou élever ces Tons.

Il a encore inventé des notes qui répondent aux différens noms, dont ſa Gamme eſt ſuſceptible par les changemens de voyelles dont on vient de parler. Ces notes reçoivent auſſi divers changemens, ſoit pour exprimer la durée du Temps, ſoit pour exprimer les Merides, Heptamerides, & même les demi-Heptamerides, par rapport à l'élevation & à l'abbaiſſement des Tons. Elles ſe rangent ſur une ſeule ligne, au commencement de laquelle on met une des Clefs, qui ſont encore de l'invention de M. Sauveur, & qui ſervent à marquer les différentes Octaves. On peut conſulter ſur ce nouveau Syſtême le Mémoire de l'Academie Royale des Sciences aux années 1701 & 1702.

Digitized by Google



PROBLEMES D'OPTIQUE.

L'Optique eſt une ſcience qui conſidere les proprietés de la lumiere, & par conſéquent les couleurs : elle comprend tout ce qui ſert d'objet à la vûe.

La lumiere conſiderée en elle-même, peut-être regardée de trois différentes manieres, 1°. En tant qu'elle eſt directe, c'eſt à-dire, que ſes rayons ſont envoyés du corps lumineux ou coloré vers l'œil. 2°. En tant qu'elle eſt reflechie, c'eſt-à-dire, que ſes rayons ayant frappé quelque corps poli, comme un miroir, ils ſont renvoyés vers l'œil. 3° En tant qu'elle eſt rompue, c'eſt-à-dire, que ſes rayons ayant rencontré un corps tranſparent, ils le pénétrent en ſe briſant.

La premiere maniere de conſidérer la lumiere, ſert d'objet à la perſpective, qui trompe agréablement l'imagination. Cette partie de l'Optique nous apprend à tracer géométriquement ſur un plan la repréſentation des objets ſelon leurs dimenſions & leurs ſituations différentes ; en ſorte que ces repréſentations faſſent ſur nos yeux le même effet que feroient les objets mêmes dont elles ne ſont que les images.

On examine la lumiere réflechie dans la Catoptrique, qui conſidere les proprietés des Miroirs plats, convexes & concaves. Cette partie ſuppoſe

que l'angle de réflexion est égal à l'angle d'incidence.

La Dioptrique considere les proprietés de la lumiere rompue. L'expérience apprend qu'un rayon de lumiere passant obliquement d'un milieu dans un autre, se détourne en s'éloignant ou en s'approchant de la perpendiculaire. Il s'en éloigne si le milieu dans lequel il entre, est plus difficile à pénétrer que celui dans lequel il est ; mais il s'en approche, si le milieu dans lequel il passe est plus aisé à pénétrer que celui qu'il quitte.

L'Optique suppose aussi que les objets qui sont vûs sous de plus petits angles, paroissent plus petits ; ce qui arrive ordinairement, lorsqu'ils sont plus éloignés. Sur ces suppositions, nous résoudrons plusieurs Problêmes utiles & agréables, comme vous allez voir.

PROBLEME I.

Faire qu'un objet, étant vû de loin, ou de près, paroisse toujours de la même grandeur.

Plan. 11. Fig. 47.

POur faire que la ligne AB paroisse d'une même grandeur, lorsqu'elle sera mise en différens lieux plus ou moins éloignés de l'œil placé en C, il faut décrire un cercle dont la circonférence passera par l'œil, & mettre la ligne AB en tel endroit de la circonférence qu'il plaira, comme vous le voyez en ED & AB. Cette ligne étant en ED, qui est la situation la plus éloignée de l'œil, paroîtra de la même grandeur que si elle étoit en AB, qui est beaucoup plus proche : car l'œil arrêté en C, voit ces deux lignes égales AB, DE, sous les angles égaux ACB, DCE.

Digitized by Google

REMARQUE.

Il eſt évident que la ligne propoſée AB ſera toujours vûe ſous un même angle, & que par conſéquent elle paroîtra toujours d'une même grandeur à quelque diſtance que l'œil ſoit de cette ligne, pourvû qu'il ne quitte jamais la circonférence du cercle qui paſſe par les deux extrêmités A, B : ainſi ſans changer la ſituation de la ligne AB, on peut changer celle de l'œil, en le plaçant en tel point qu'on voudra de la circonférence d'un cercle quelconque qui paſſe par les deux extrêmités de la ligne, ou grandeur propoſée AB, comme en F, ou en G : les angles viſuels AFB, AGB, ACB, étant toujours égaux.

Il eſt auſſi évident qu'une même ligne AB paroîtra toûjours de la même grandeur en l'approchant de l'œil C, ſans la placer dans la circonférence d'un cercle, pourvû que ſes deux extrêmités demeurent toujours dans les mêmes rayons viſuels AC, BC, comme il arrive en lui donnant la ſituation AD ; parce que dans cette ſituation elle eſt vûe ſous le même angle viſuel ACB ; ce qui ne doit point changer ſa grandeur apparente, quoiqu'elle ſoit plus proche de l'œil C. Plan. 11. Fig. 50.

PROBLEME II.

La ligne AC étant donnée, & la ligne CZ indéterminée étant perpendiculaire ſur AC à ſon extrêmité C, trouver dans la ligne CZ un point D, d'où la partie AB de la ligne AC ſoit vûe la plus grande qu'elle puiſſe être vûe dans toute l'étendue de la ligne CZ.

DIviſez la ligne AB au point F en deux parties égales AF, FB ; des points A & B com- Plan. 12. Fig. 7.

me centre, & de l'intervalle FC, décrivez deux arcs de cercles qui se couperont en G, du point G menez sur CZ la perpendiculaire GD: le point D sera celui où l'œil étant placé, il verra la ligne AB la plus grande qu'il la puisse voir dans toute l'étendue de la ligne indéterminée CZ: car ayant décrit le cercle ABD, il est aisé de démontrer que l'angle ADB est le plus grand de tous ceux dont le sommet sera dans la ligne CZ, & qui auront pour base la ligne AB. Tous les angles, qui sont au dessus ou au dessous de D, sont plus petits que celui qui est en D.

REMARQUE.

Il est clair qu'en quelque point du plus grand arc ADB on place l'œil, la ligne AB sera vûe d'une même grandeur, puisqu'elle sera vûe sous le même angle.

PROBLEME III.

L'œil étant placé en un point comme B, & regardant vers la ligne AE, couper de cette ligne la partie DE, qui soit vûe de la même grandeur qu'une autre partie AC de la même ligne AE.

Plan. 12. Fig. 8. AYant tiré les lignes BA, BC, BE, du point B, comme centre & de l'intervalle BI, pris à volonté, décrivez l'arc de cercle IFH; faites GH égal à IF; par le point G menez la ligne BGD, la partie DE sera vûe de la même grandeur que la partie AC, puisqu'elles sont vûes sous les mêmes angles.

Digitized by Google

REMARQUES.

C'est par cette égalité des angles visuels, que l'on peut écrire contre une muraille des caracteres, qui bien qu'inégaux, paroîtront égaux, étant vûs d'un certain point, & que l'on peut placer sur un pinacle, ou sur quelque haut frontispice une statue d'une telle longueur & d'une telle grosseur, qu'étant vûe d'en bas, elle paroisse d'une grandeur proportionnée à la hauteur du lieu, sans qu'il soit besoin de polir extrêmement cette figure, & encore moins de s'arrêter aux muscles du corps, ni aux plis de la draperie, comme l'on feroit si la figure se voyoit de plus près.

Lorsqu'on voudra exécuter ce Problême sur une muraille, il faudra d'abord l'executer sur le papier: mais on doit prendre la distance du point de vûe à la muraille, & la hauteur de la muraille ou de ses parties, afin de rapporter ces mesures sur le papier par le moyen d'une échelle. On portera les distances trouvées sur le papier à la muraille, en observant de donner autant de toises ou de pieds sur la muraille, qu'on aura trouvé sur le papier de parties qui correspondent dans l'échelle aux toises, pieds, pouces, &c.

PROBLEME IV.

Trouver un point, duquel deux parties inégales d'une ligne droite paroissent égales.

IL y a une infinité de points différens, d'où les deux parties inégales AB, BC, de la ligne droite AC, étant vûes, peuvent paroître égales, parce qu'ils sont dans la circonférence d'un cercle: mais Plan. 11. Fig. 49.

ſans nous arrêter à la Theorie, nous enſeignerons ici une méthode très-courte pour trouver un de ces points, comme vous allez voir.

Décrivez des deux extrêmités A, B, & de l'intervalle AB deux arcs de cercle, qui ſe coupent ici au point D, d'où il faudra décrire avec la même ouverture de Compas un autre arc de cercle vers F. Décrivez pareillement des deux extrêmités B, C, & de l'intervalle BC, deux arcs de cercle, qui ſe coupent ici au point E, & décrivez de ce point E, avec la même ouverture de Compas un autre arc de cercle, qui coupe ici en F celui que vous avez décrit du point D. Ce point F ſera celui duquel les deux lignes propoſées AB, BC, étant vûes, paroîtront égales, à cauſe de l'égalité des deux angles viſuels AFB, BFC.

REMARQUE.

On operera de la même façon, lorſque les deux extrêmités des deux lignes propoſées AB, BC, ne ſe joindront pas. Nous avons enſeigné dans notre *Dictionnaire Mathematique*, la maniere de trouver un point, duquel trois parties inégales d'une ligne droite, étant vûes, paroîtront égales.

PROBLEME V.

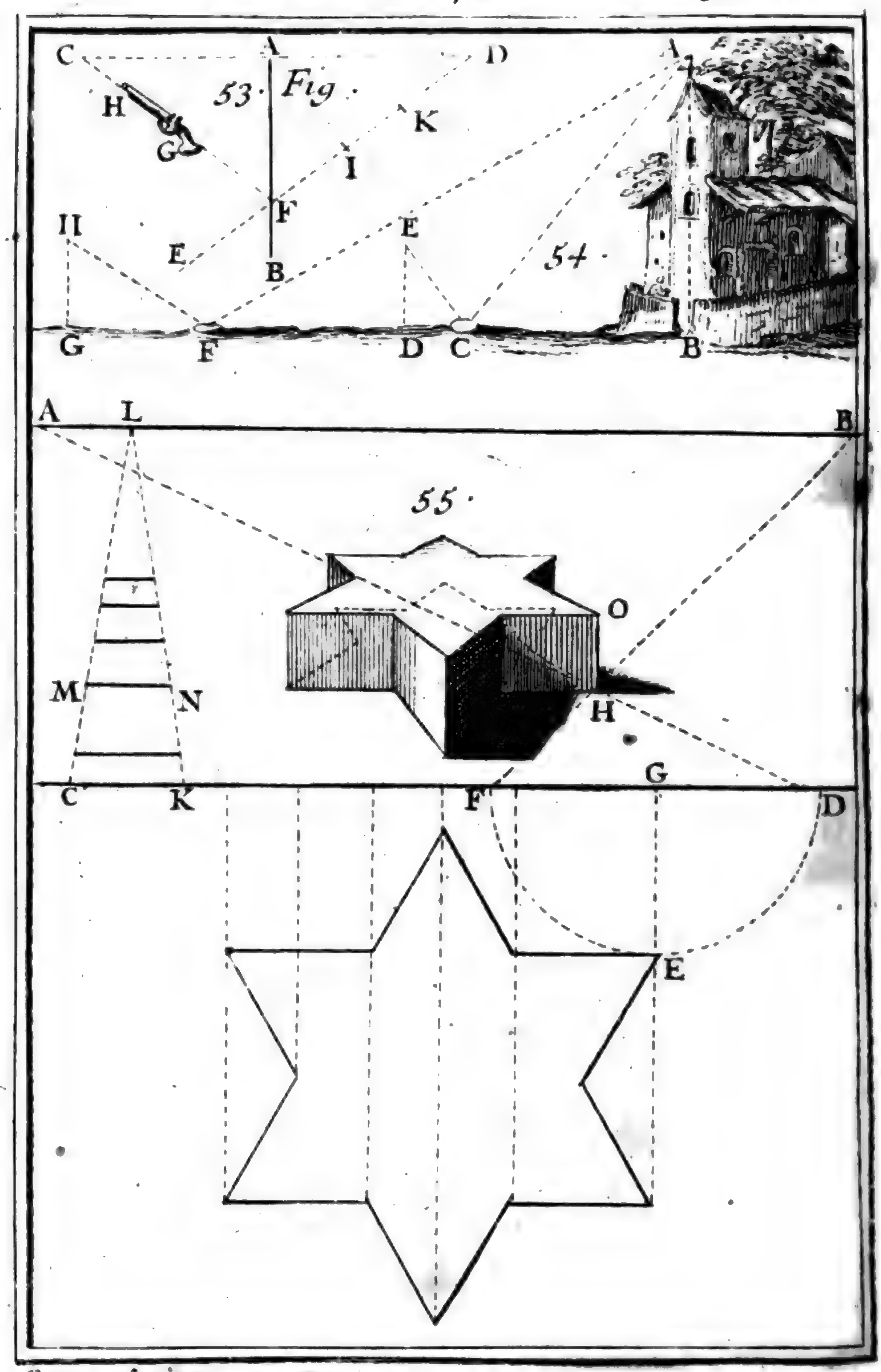
Un Anneau étant placé à une certaine diſtance, propoſer de l'enfiler avec une Baguette recourbée par l'une de ſes extrêmités.

IL faut 1°. que celui qui ſe prépare à enfiler l'Anneau, puiſſe le toucher avec la Baguette. 2°. Qu'il n'en voye point l'ouverture.* 3°. Qu'il

* C'eſt-à-dire, que l'Anneau doit lui préſenter ſon bord.

Digitized by Google

Digitized by Google



Bergr fecit To. I. Pl. 13

Digitized by Google

ferme un œil. 4°. Qu'il essaye à enfiler l'Anneau avec le bout recourbé de la Baguette.

Il n'est pas aisé d'enfiler cet Anneau aux conditions qu'on vient de marquer. Cette difficulté vient de ce qu'avec un œil seul on ne peut pas juger de la distance des objets.

PROBLEME VI.

Representer en perspective tel objet que l'on voudra, sans se servir de point de vûe.

PRemierement, pour trouver dans le Tableau l'apparence de quelque point du plan Geométral, par exemple, du point E, tirez de ce point E, la ligne EG perpendiculaire à la ligne de terre CD. Portez la longueur de cette perpendiculaire GE, de part & d'autre du point G, sur la même ligne de terre CD, aux points F, D. Après cela ayant pris à volonté sur la ligne horisontale AB, les deux points de distance A, B, tirez de ces deux points A, B, par les points D, F, les droites AD, BF, qui donneront par leur intersection l'apparence H du point proposé E. Plan. 13. Fig. 55.

C'est de la même façon que l'on trouvera l'apparence de quelqu'autre point du plan Géométral, & par conséquent la représentation de la base de quelque corps que ce soit, lequel se pourra representer en perspective en tirant de tous les points de son assiette, ou plan perspectif des lignes perpendiculaires à la ligne de terre CD, & égales en apparence à la hauteur du corps proposé; ce qui se fera en cette sorte.

Ayant porté la hauteur naturelle du corps proposé, sur la ligne de terre CD, par exemple, de

C en K, tirez de ces deux points C, K, au point L pris à discrétion sur la ligne horisontale AB; les droites LC, LK, qui termineront les hauteurs apparentes de tous les points du corps proposé, en tirant de ces points des lignes paralleles à la ligne de terre CD. Comme pour trouver la hauteur du point H, on tirera de ce point H une ligne parallele à CD, qui coupera le Triangle LCK, & donnera MN. On portera cette longueur MN en HO, qu'on fera perpendiculaire à CD. Cette ligne HO sera la hauteur apparente du corps représenté dans le Tableau.

On fera la même chose à l'égard de tous les autres points du plan perspectif, & les lignes tirées de ces points parallelement à CD, donneront dans le Triangle LCK les hauteurs apparentes, qu'il faut élever perpendiculairement à CD à chaque point du plan perspectif, comme on vient de le faire.

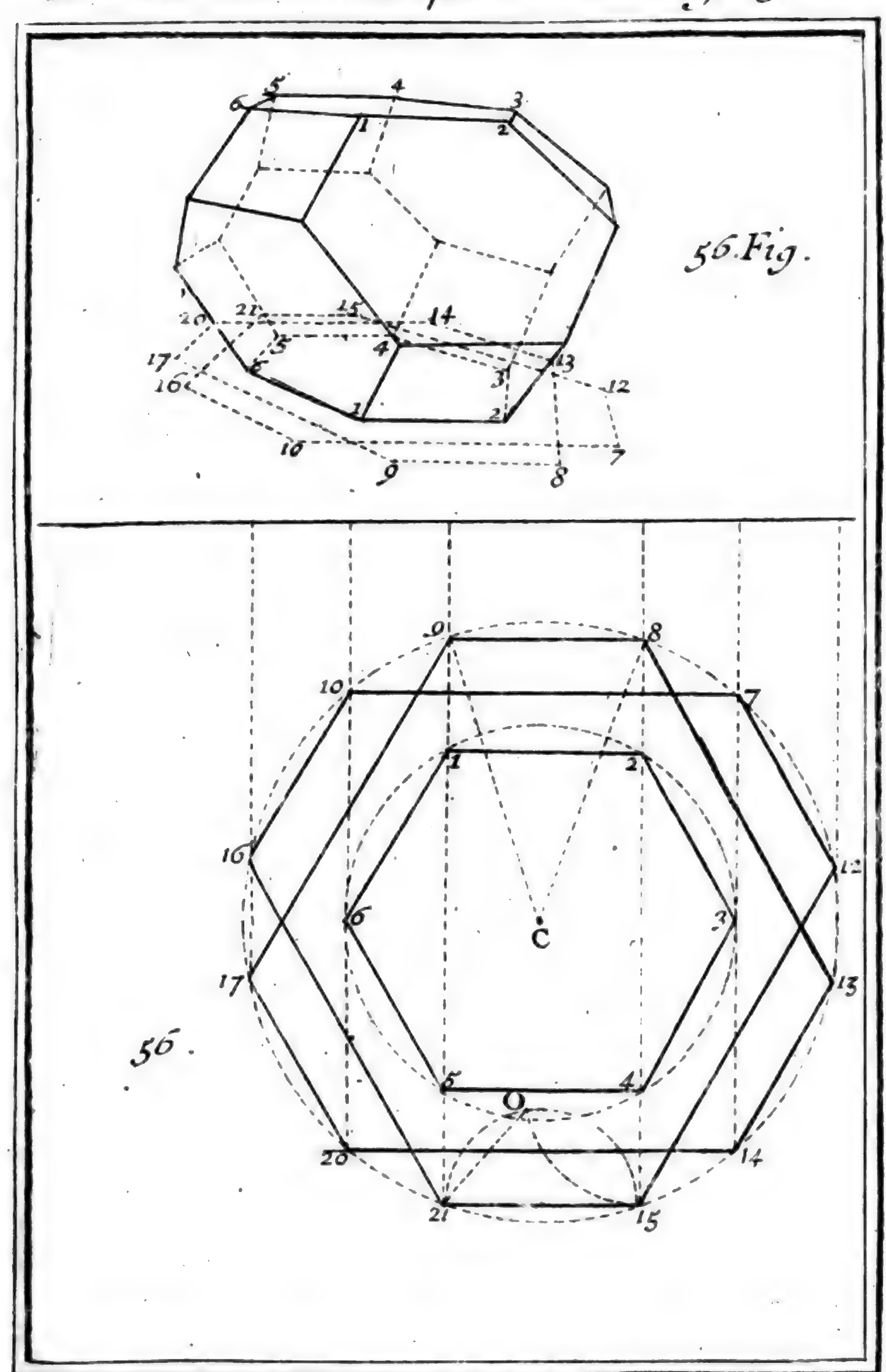
PROBLEME VII.

Representer en perspective un Poliedre équilatéral; terminé par six quarrés égaux, & par huit exagones réguliers & egaux entr'eux.

Plan. 14. Fig. 56.

CEux qui entendent la perspective representeront facilement ce corps dans le Tableau, dont le point de vûe est V, & un des deux points de distance est D, marqué sur la ligne horisontale DV, qui est parallele à la ligne de terre AB, pourvû qu'ils en sçachent décrire le plan & le profil; ce qui se fera en cette sorte.

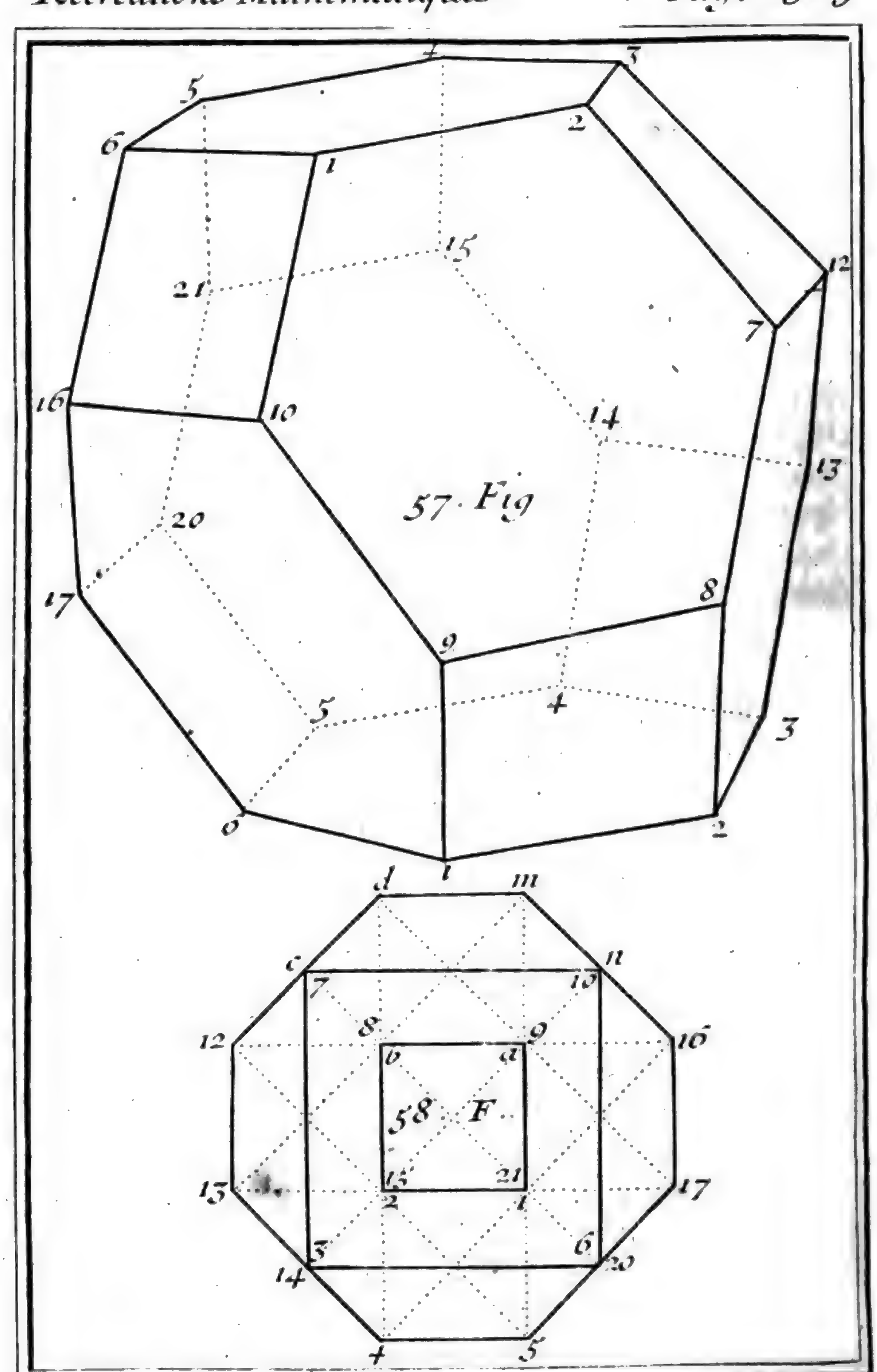
Premierement, si l'on veut que ce corps s'appuye sur l'un de ses huit exagones, comme 1, 2, 3, 4, 5, 6, on décrira de son centre C un cercle



Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google



Digitized by Google

cle dont le rayon ou demi-diametre C8, ou C9, soit tel, que son quarré soit au quarré de celui de l'exagone, comme 7 est à 3; de sorte que si le rayon ou le côté 1, 2, de l'exagone est de 65466 parties égales; le rayon C8, ou C9, du grand cercle en contiendra 100000. Plan. 14. Fig. 56.

Ayant donc ainsi décrit ce grand cercle, on le divisera inégalement, comme vous voyez dans la figure, en sorte que le plus petit côté 8, 9, & les autres cinq soient égaux chacun au côté de l'exagone, & que le plus grand 7, 10, & les cinq autres soient doubles chacun du plus petit; auquel cas, le plus petit soutiendra un arc de 38. 12'. & le plus grand, ou son double un arc de 81. 48'. Mais sans cela il sera aisé de décrire ce plan par la seule inspection de la figure.

Pour le profil, décrivez autour du plus petit côté 21, 15, le demi-cercle 21, O, 15, & ayant décrit du point 4 par le point 15, l'arc de cercle 15 O; joignez la droite 21 O, qui sera la hauteur des points 9, 8, 14, 13, 20, 17, la hauteur des points 7, 12, 15, 21, 16, 10, étant égale au double de la ligne 21 O, & la hauteur des points 1, 2, 3, 4, 5, 6, étant au triple de la même ligne 21 O.

Si l'on met en perspective ce plan ainsi décrit, & que de tous ses angles on éleve des perpendiculaires à la ligne de terre, pour y mettre les hauteurs convenables à celles du profil, il n'y aura plus qu'à joindre les côtés, comme vous voyez dans la figure, & encore mieux dans la 57 *fig.* que nous avons représentée en plus grand volume, pour vous mieux faire distinguer les côtés qu'il faut joindre, dont ceux, qui sont marqués par des lignes noires, sont ceux qui paroissent à l'œil, & Fig. 57. Plan. 15.

les autres, qui sont marqués par des lignes ponctuées, sont ceux qu'on ne voit pas.

Secondement, si l'on veut que le corps s'appuye sur l'une de ses six surfaces quarrées, comme sur le quarré *a b*, 15 21, le plan, ou l'assiette de ce Polyedre changera, & elle sera telle que vous la voyez dans la figure 58, qu'il ne faut que regarder pour la comprendre pour le moins, quand on sçaura que le grand côté de l'octogone irrégulier, comme *d* 12 est égal à la diagonale *a* 15, ou *b* 21 du quarré intérieur, qui sert de base au Polyedre.

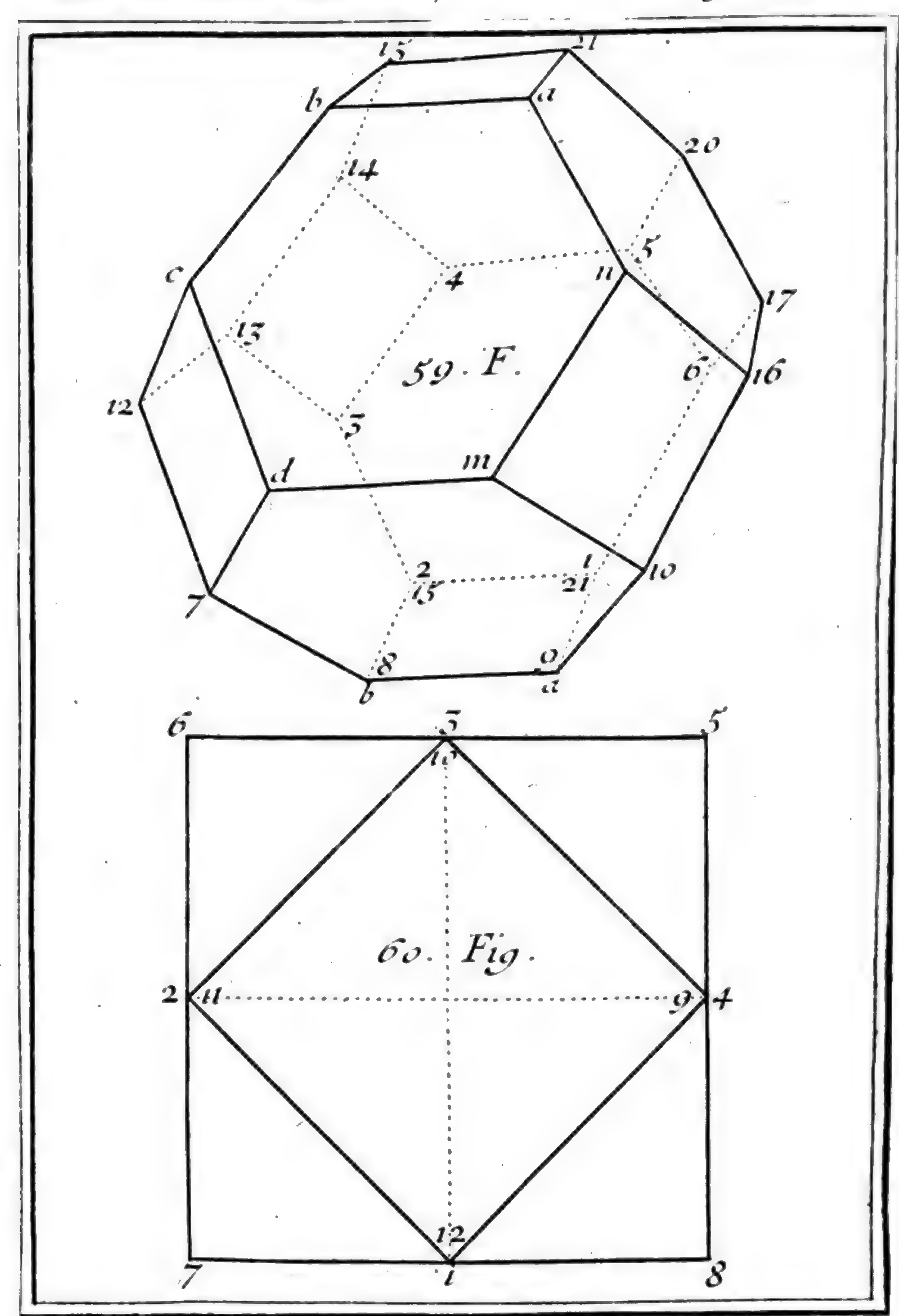
Plan. 15. Fig. 58.

Le profil change aussi; car la hauteur des points 3, 7, 10, 6, est égale à la moitié *cd* du grand côté *d* 12 de l'octogone irrégulier, la hauteur des points 4, 5, 17, 16, *m*, *d*, est égale au côté entier *d* 12, la hauteur des points 14, 20, *n*, *c*, est égale au même côté *d* 12, & à sa moitié *cd*; enfin la hauteur des points *a*, *b*, 15, 21, est double du même côté *d* 12, dont le quarré est au quarré du rayon de l'octogone irrégulier, comme 4 est à 5; ce qui fait que si le rayon est de 100000 parties égales; le grand côté *d* 12 en contient 89442, & soutient un arc de 53, 8', & que le petit côté *dm* en comprend 63245, & soutient un arc de 36, 56'. Par le moyen de ce plan & de ce profil, nous avons mis le Polyedre en perspective, comme vous voyez dans la 59. *fig.*

Plan. 16. Fig. 59.

Digitized by Google

Digitized by Google


15
21
b
a
20
14
c
4
5
n
17
13
59. F.
6
16
12
3
d
m
7
2
15
1
21
10
8
9
b
a
6
3
5
16
60. Fig.
2
11
9
4
12
7
1
8

To. I. Pl. 16

PROBLEME VIII.

Représenter en perspective un Polyedre équilateral, terminé par six quarrés égaux, & par huit Triangles équilateraux, & égaux entr'eux.

SI vous voulez que le Polyedre s'appuye sur l'un de ses six quarrés égaux, comme 9, 10, 11, 12, il n'y aura qu'à lui circonscrire un autre quarré, & le plan sera achevé, dont le profil est tel. Plan. 16. Fig. 60.

La hauteur des points 5, 6, 7, 8, est égale à la moitié 3, 5, du côté 6, 5, du quarré circonscrit, & la hauteur des points 1, 2, 3, 4, est égale au côté entier 6, 5, ou à la diagonale 11, 9, ou 10, 12, du quarré inscrit, qui sert de base au Polyedre.

Par le moyen de ce plan & de ce profil, nous avons mis ce Polyedre en perspective, comme vous voyez dans la 61. *Fig.* qui vous fait voir distinctement les côtés qu'il faut joindre, quand on a trouvé dans le Tableau l'apparence des points qui bornent leurs extrêmités. Plan. 17. Fig. 61.

PROBLEME IX.

Représenter en perspective un Polyedre équilatéral, terminé par six quarrés égaux, & par douze Triangles isoceles & égaux entr'eux, dont la hauteur est égale à la base.

PRemierement, si vous voulez que le Polyedre s'appuye sur l'un de ses six quarrés égaux, comme 3 6, 9 12, son assiette sera telle que vous la voyez dans la Figure, où les demi-cercles Plan. 17. Fig. 62.

qui sont décrits des quatre angles droits de la base 3, 6, 9, 12, des milieux A, B, des deux côtés opposez 5 2, & 12 9, font assez connoître la description de ce plan, sans qu'il soit besoin d'en parler davantage.

Pour le profil, nous dirons que la hauteur des points 4, 11 : 7, 8, 1, 14, est égale à la touchante 7 15, & que la hauteur des points 5, 6, 13, 12, est double de la précédente, c'est-à-dire, double de la même touchante 7, 15. Après quoi il n'y a plus qu'à regarder la 63. *Fig.* pour comprendre la maniere de représenter ce Polyedre en pespective, que je vous représente encore tout ombré, & vû d'une autre façon, dans la 64. *Fig.*

Plan. 18. Fig. 63.

Plan. 19. Fig. 64.

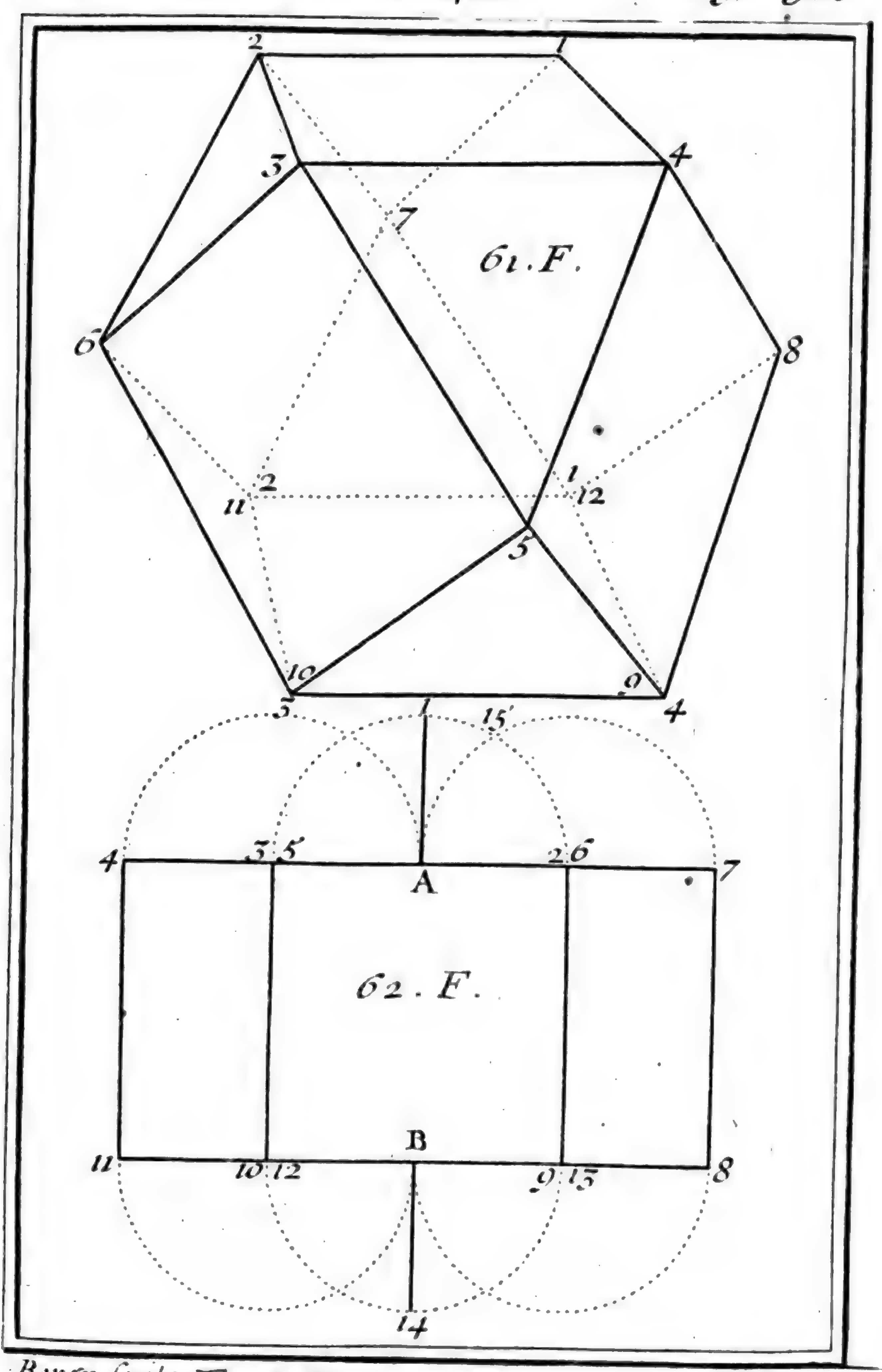
Secondement, si vous voulez que le Polyedre soit élevé droit sur l'un de ses angles solides, comme 1, auquel cas son assiete sera le simple exagone régulier 2, 3, 4, 5, 6, 7, dont le centre sera le point 1, & le profil sera tel.

Fig. 65.

La hauteur des points 8, 9, 10, 11, 12, 13, est égale à la moitié, du côté de l'exagone : la hauteur des points 2, 3, 4, 5, 6, 7, est égale au triple de la précédente, c'est-à-dire, à trois moitiés du côté de l'exagone : & la hauteur du point 1 est double du côté de l'exagone, ou égale au diametre 4, 7.

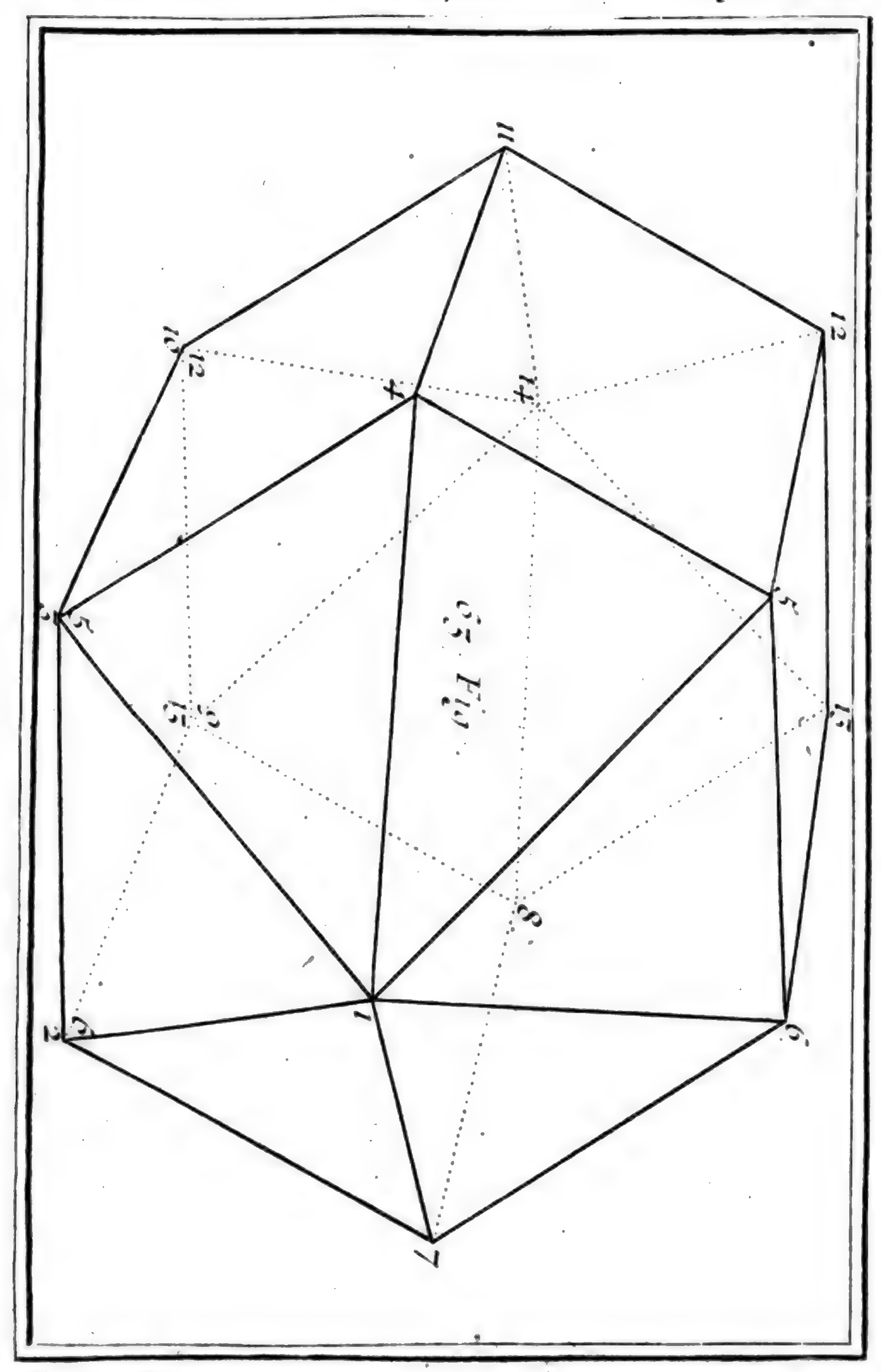
Je n'enseignerai pas ici la maniere de représenter en perspective ce Polyedre selon son plan & son profil, parce que nous en avons suffisamment parlé dans notre *Traité de Perspective*; c'est pourquoi je me contenterai de vous en donner simplement ici la Figure.

Plan. 20. Fig. 66.



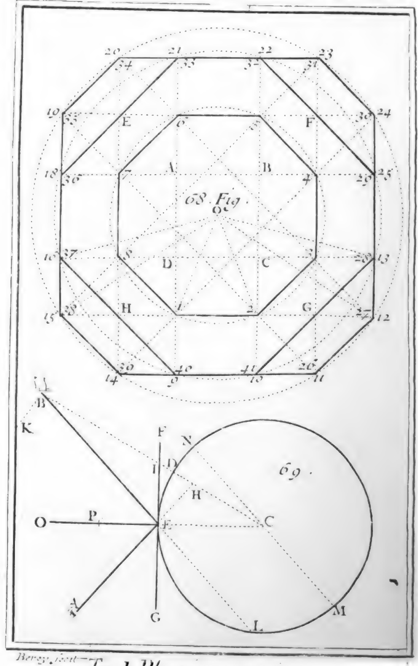
Bergy. fecit To. I. Pl. 17

Digitized by Google



To. I. Pl. 18

Digitized by Google

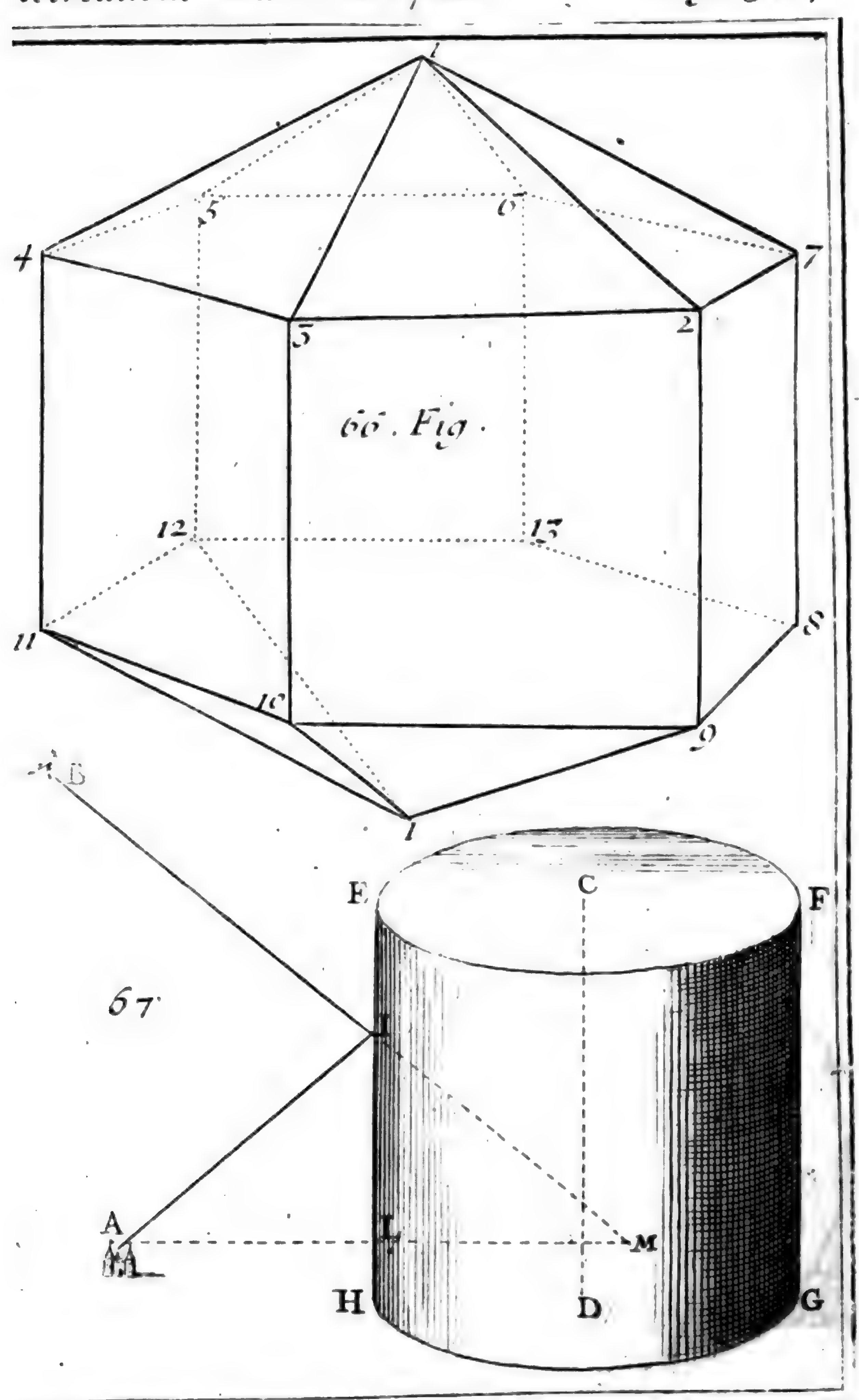


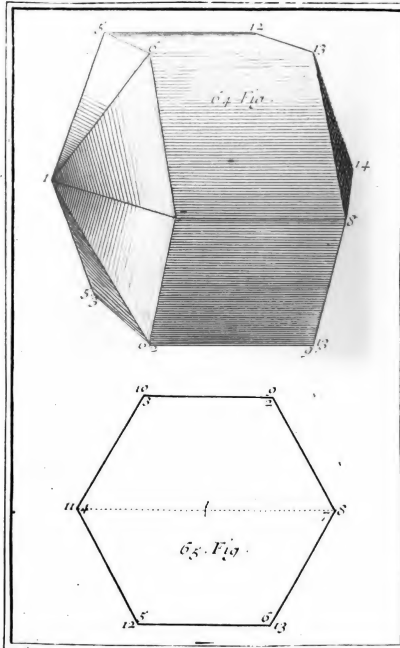
Berey sculp.

To. 1. Pl. 21.

Digitized by Google

Digitized by Google


1
5
6
4
7
3
2
66. Fig.
12
13
11
8
10
9
1
A B
E
C
F
67
I
A
L
M
H
D
G



Bergy fecit To. I. Pl. 19

Digitized by Google

PROBLEME X.

Représenter en perspective un Polyedre équilatéral, terminé par douze quarrés égaux, par huit exagones reguliers & égaux, & par six octogones reguliers & egaux.

Plan. 21. Fig. 68.

SI vous voulez que la base de ce corps soit l'un de ses six octogones, comme 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, dont le centre est O, joignez les extrêmités de deux côtés opposés & paralleles par des lignes droites paralleles entr'elles, qui par leurs mutuelles intersections, formeront un quarré, comme ABCD. Prolongez les deux côtés opposés & paralleles 1, 2, & 5, 6, & pareillement les deux côtés opposés & paralleles 3, 4, & 7, 8, qui, en rencontrant les deux premiers, formeront un autre quarré plus grand EFGH. Après quoi il sera facile d'achever le plan ; sçavoir, en faisant la ligne E 20 égale à la partie E7, &c.

Pour une description plus exacte de ce plan, on considerera qu'en supposant le rayon O1, ou O2, de 1000 parties égales, le rayon O13, ou O16, du cercle moyen comprend 1514 de ces parties, & que le rayon O12, ou O15, du plus grand cercle en contient 1731. Que le plus petit côté soutient dans le plus grand cercle un arc 11 12, ou 14 15, de 25 degrés 32, dans le moyen un arc 1 2, de 29 degrés 16'. & dans le plus petit un arc 1 2, de 45 degrés. Et que le plus grand côté soutient dans le plus grand cercle un arc 14 11, de 64 degrés 28', & dans le cercle moyen un arc 10 13, ou 9, 16, de 60 degrés, 44', dont la corde est double du plus petit côté 9 10.

Digitized by Google

Pour le profil, on donnera toute la ligne 15 12, à la hauteur des points 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, dont l'assiette est l'octogone intérieur, ou le plus petit octogone régulier 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. On donnera la partie 15 G, à la hauteur des points 9, 10, 13, 25, 22, 21, 18, 16, dont l'assiette est l'octogone moyen. On donnera la partie 15 2, à la hauteur des points 14, 11, 12, 24, 23, 20, 19, 15, dont l'assiete est le plus grand octogone. On donnera la partie 15 1, à la hauteur des points 26, 27, 30, 31, 34, 35, 38, 39, dont l'assiete est le plus grand octogone. Enfin l'on donnera la partie 15, H, à la hauteur des points 40, 41, 28, 29, 32, 33, 36, 37, dont l'assiete est l'octogone moyen.

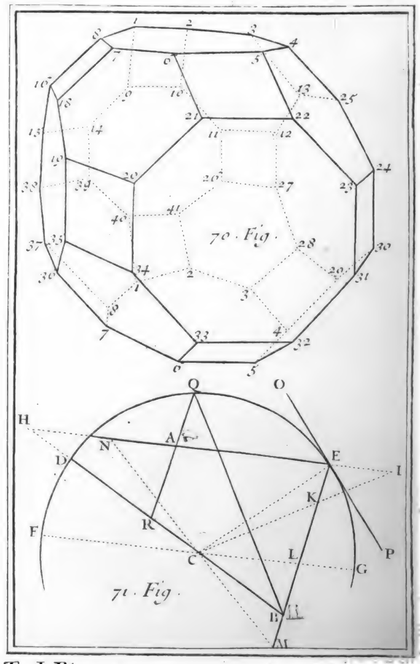
La hauteur 15 12, se trouvera de 2930 parties, dont le rayon O 1 du plus petit octogone en contient 1000. la hauteur 15 G, est de 2389 semblables parties: la hauteur 15 2, en contient 1848: la hauteur 15 1, comprend 1082: enfin la hauteur 15 H, en contient 541.

Plan. 22. Fig. 70. Quand on aura mis en perspective le plan de ce Polyedre terminé par 26 faces, & qu'on aura déterminé la position de ses angles solides suivant leurs hauteurs différentes, que le profil précédent vous donne, on joindra ces angles solides par des lignes droites qui feront les côtés égaux du Polyedre, comme vous voyez dans la Figure, qu'il suffit de regarder pour la comprendre.

Des Miroirs plats.

Ce qu'on va dire des Miroirs plats, doit s'entendre des Miroirs de glaces, quoiqu'on puisse en appliquer une grande partie à ceux de fonte, d'acier, &c.

Digitized by Google



To. I. Pl. 22.

Digitized by Google

PROBLEME XI.

Un point de quelque objet, & le lieu de l'œil, étant donnés, trouver le point de reflexion sur la surface d'un Miroir plat.

SOit B un point de l'objet, A l'œil, & le Miroir représenté par la ligne CD. Du point B menez à CD la perpendiculaire BD que vous prolongerez jusqu'en F, ensorte que DF soit égale à DB. Par les points F & A tirez la ligne AF, qui coupera CD en E. Ce point E sera le point de réflexion cherché: de sorte que si l'on tire les deux lignes AE, BE, l'angle de réflexion AEC sera égal à l'angle d'incidence BED comme il est aisé de le démontrer.

Plan. 17. Fig. 51.

REMARQUE.

Dans notre *Dictionnaire Mathématique* on trouve ce Problême appliqué à un Miroir Sphérique : mais il se peut aisément appliquer au Jeu de Billard. Supposons que la ligne CD représente un bord du Billard, & qu'aux deux points A, B, du tapis ou table du même Billard, il y ait deux billes, dont l'une, comme Billard, il y ait deux billes directement contre l'autre B, à cause du Fer qui est entre deux. On trouvera le point E, comme il vient d'être enseigné, & ce point E sera celui où le Joueur envoyera la bille A, afin que par une bricole elle puisse toucher l'autre bille qui sera en B. Mais dans la pratique, cela se peut exécuter plus facilement en cette sorte.

On trouvera, dis-je, le point E, en prolon-

Digitized by Google

geant par la pensée la perpendiculaire BD jusqu'en F, en sorte que la ligne DF soit égale à cette perpendiculaire BD, & ayant mis en F une marque visible, le Joueur poussera sa bile A, selon la ligne AF. Alors cette bille A, rencontrant le bord du billard en E, se refléchira, & ira rencontrer la bille B, mais on doit observer de pousser fortement la bille A, pour surmonter les défauts du Billard.

Comme dans ce Jeu il n'est pas toujours facile, ni même permis de mettre une marque visible en F, parce que l'adversaire a la liberté de l'ôter, il faut que le Joueur vise du point F la bille A, & qu'il remarque par le rayon visuel FA, le point E sur le bord du Billard, où il doit envoyer sa bille pour la faire refléchir en B.

Si vous voulez trouver le point E de refléxion, pour faire que la bille A rencontre la bille B par deux bricoles, tirez du point A, la ligne AC, parallele à la ligne DG, & du point B, la ligne BG parallele à la ligne CD. Cherchez à la somme des deux lignes paralleles AC, GD, à la ligne AC, & à la somme des deux lignes paralleles CD, BG, une quatriéme proportionnelle, dont la longueur étant portée en CE, donnera le point E qu'on cherche.

Plan. 11. Fig. 52.

PROBLEME XII.

Tirer par derriere l'épaule un pistolet aussi justement que si on le couchoit en joue.

Plan. 13. Fig. 53.

SOit AB une ligne qui représente le Miroir, & CD la perpendiculaire, menée à ce Miroir de C but où l'on veut tirer. Soit encore D l'image ou apppartence de ce but qui paroîtra sur cette per-

pendiculaire aussi éloignée au-delà du miroir, que le but C l'est en deçà. Soit enfin l'œil placé en E qui regarde le but en D par la ligne de refléxion EFD. Le rayon d'incidence sera la ligne CF, selon laquelle il faut placer le pistolet GH derriere l'épaule, & le tourner de maniere que son apparence IK convienne avec la ligne de refléxion EFD, & soit dirigée vers l'apparence D du but C. Le pistolet GH ainsi tourné regardera directement le but C, & ne manquera point de le frapper, si on lâche le coup.

PROBLEME XIII.

Les points de l'œil & de quelque objet, avec le point de refléxion sur la surface d'un Miroir plan, étant donnés, déterminer le lieu où l'on doit voir l'image de l'objet proposé.

SI l'œil est A, l'objet B, & E le point de réflexion sur la surface CD d'un Miroir plan, tirez de l'objet B, la ligne indéfinie BF perpendiculaire à cette surface, & prolongez le rayon de refléxion AE jusqu'à ce qu'il rencontre cette perpendiculaire en un point, comme F; ou bien faites DF égal à DB. Le point F sera le lieu de l'image de l'objet B, c'est-à-dire, le point où l'objet B sera vû par l'œil A dans le Miroir plan CD. Car l'Optique apprend que l'image d'un objet se fait au concours du rayon de refléxion, & d'une ligne droite tirée de l'objet perpendiculairement à la surface du Miroir, soit que cette surface soit plane, soit qu'elle soit sphérique.

Plan. 11. Fig. 51.

D'où il aisé de conclure par l'égalité des angles de refléxion & d'incidence, que quand le

Digitized by Google

Plan. 11. Fig. 51. Miroir est plan, comme nous le supposons ici; l'objet doit être vû aussi enfoncé dans le Miroir, qu'il en est éloigné; & c'est à cause de cela que nous avons fait la ligne DF égale à la perpendiculaire DB.

Il s'ensuit aussi que la distance AF de l'image E est égale au rayon d'incidence BE, & au rayon de refléxion AE, parce que le rayon d'incidence BE est égal à la ligne EF, à cause de l'égalité des deux Triangles rectangles EDB, EDF.

Il s'ensuit encore que si l'œil A s'approche ou s'éloigne dans le même rayon de refléxion AE du point de refléxion E d'une certaine quantité; l'image F de l'objet B sera approchée ou éloignée de l'œil A de la même quantité; parce que la distance EF demeurant toujours la même, la distance AF croîtra ou décroîtra comme la distance AE.

Il s'ensuit de plus que quand le Miroir plan est parallele à l'horison, comme CD, une grandeur perpendiculaire à l'horison, comme BD, doit paroître renversée; & que quand le miroir plan est perpendiculaire à l'horison, la main droite d'une personne lui doit paroître à la gauche de son image, & lagauche à la droite.

Enfin il s'ensuit que la distance de l'œil à l'image de quelque objet vû dans le dernier miroir par plusieurs refléxions à l'aide de plusieurs Miroirs plans, est égale à la somme de tous les rayons d'incidence & de refléxion, & qu'un objet se peut quelquefois multiplier dans un miroir plan, lorsqu'il est de verre.

C'est ainsi que l'on voit quelquefois qu'un flambeau allumé paroît double dans un miroir plan de verre un peu épais, à cause de la double reflexion qui s'y fait, l'une sur la surface extérieure du Mi-

roir, & l'autre ſur le fonds du même Miroir. Car la lumiere ne ſe refléchiſſant pas toute ſur la ſurface extérieure du miroir, elle pénetre la glace, & va rencontrer cette feuille d'étaim qu'on met derriere, pour empêcher les rayons de paſſer outre, où elle ſe refléchit une ſeconde fois. L'œil ſe rencontrant dans le concours des deux rayons de refléxion, qui ne peuvent être paralleles, il ne faut pas s'étonner ſi on voit l'objet double, ou en deux endroits différens du miroir. Il eſt évident que la diverſe irrégularité du verre produiſant diverſes refléxions, peut multiplier davantage l'objet, ſurtout lorſqu'il ſera vû un peu de côté.

PROBLEME XIV.

Se repréſenter dans un Miroir comme volant.

IL faut placer une grande glace, de ſorte qu'elle faſſe un angle demi-droit avec l'horiſon, ou le plancher d'une chambre. Si on avance vers le miroir ainſi incliné, & qu'on étende les bras en les agitant, comme les oiſeaux font leurs aîles, le corps paroîtra horiſontal à la terre, & il ſemblera voler en l'air : mais il faut porter toute ſon attention vers ſa tête, afin de ne point jetter les yeux ſur le pavé, qui eſt auſſi élevé que les pieds.

PROBLEME XV.

Diſpoſer pluſieurs miroirs de maniere qu'on ſe voye dans chacun en même tems.

ON diſpoſera ces miroirs à la circonférence d'un cercle, de telle ſorte qu'ils conviennent avec les cordes de cercle. Pour ſe voir dans

chacun de ses Miroirs, il faut se placer au centre du cercle.

REMARQUE.

C'est par le moyen de ce Problême qu'on peut faire voir plusieurs Jets d'eau dans une chambre Optique, quoiqu'il n'y en ait qu'un.

PROBLEME XVI.

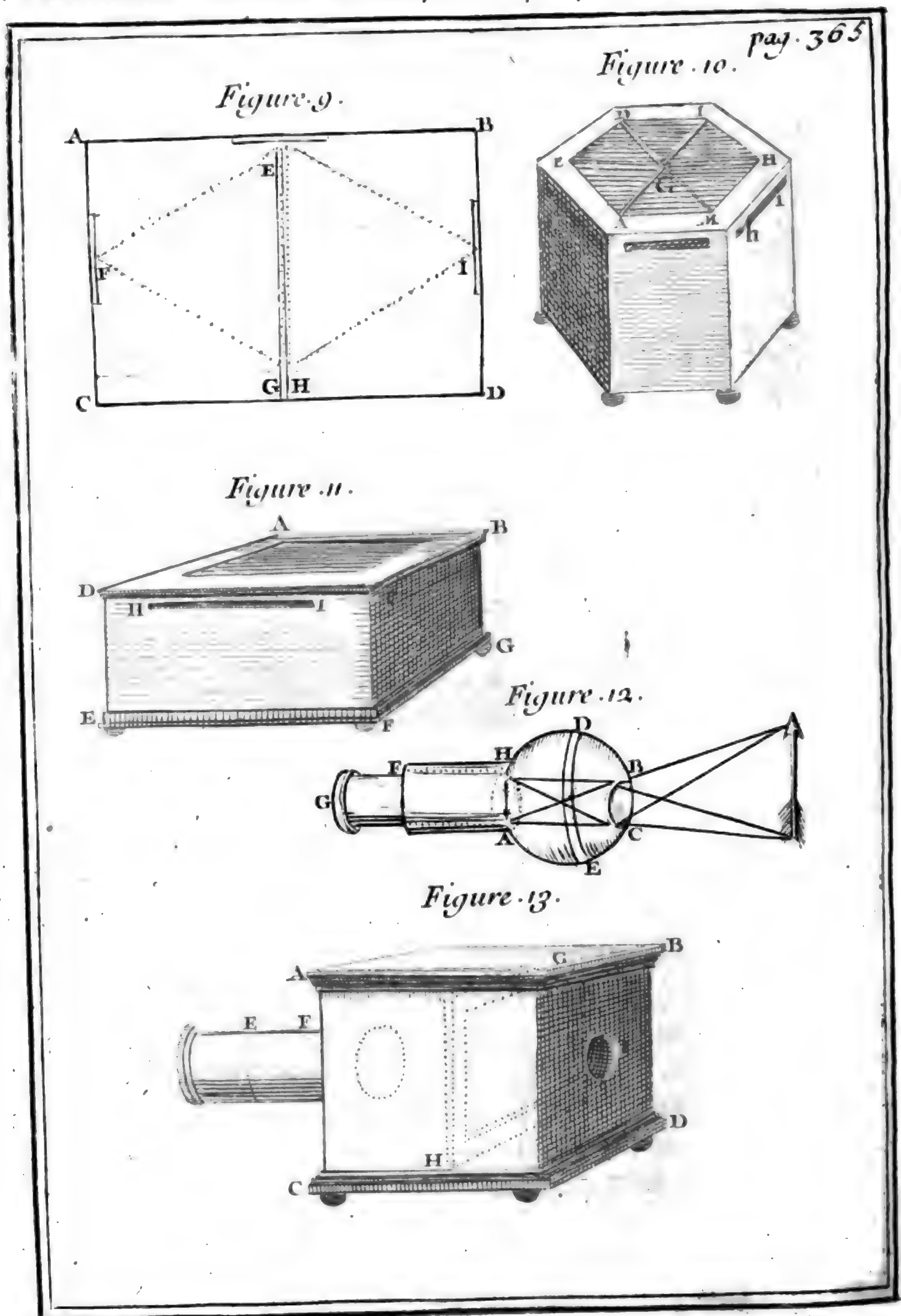
Un mari jaloux étant dans une chambre, lui faire voir ce que fait sa femme dans une autre chambre l'un & l'autre étant près de la muraille qui separe les deux chambres.

Plan. 23. Fig. 9.

QUe la figure ABCD représente les deux chambres où se trouvent le mari & la femme : que EH soit la muraille qui sépare ces deux chambres : que le mari soit en G, & la femme en H.

Il faut laisser entre la muraille de séparation & le plancher une ouverture où l'on puisse placer horisontalement un Miroir comme E. Il faut encore en mettre deux autres F & I aux deux murailles AC, BD, de maniere que les rayons qui partiront du point H ayant frappé quelque point du miroir I, aillent frapper le miroir E ; d'où s'étant refléchis, ils tomberont sur le miroir F, & de-là se refléchiront en G, où nous avons supposé que le mari s'étoit posté : il sera témoin de toutes les actions de sa femme. Il est vrai que s'il ne veut pas être apperçû, il ne doit point avoir de lumiere, ou bien il doit fermer les volets des fenêtres de la chambre où il est, si c'est pendant le jour qu'il veut satisfaire sa jalousie. Les glaces dont on se

Digitized by Google


pag. 365
Figure. 9.
A
B
E
F
I
G
H
C
D
Figure. 10.
G
H
I
h
Figure. 11.
A
B
D
H
I
G
E
F
Figure. 12.
D
H
F
B
G
A
C
E
Figure. 13.
B
A
G
E
F
D
H
C

ſert à préſent pour orner les ſalons, ſont très-commodes pour ce ſujet. La lumiere ayant été obligée de ſe détourner à la rencontre des trois miroirs, s'affoiblira quelque peu.

REMARQUES.

On pourroit par ce moyen, étant dans une chambre, voir tout ce qui ſe paſſeroit dans la rue, ſi on mettoit le Miroir ſur la tablette de la fenêtre, & qu'on le diſposât de maniere que les rayons des objets qui viendroient frapper le miroir, puſſent ſe refléchir dans la chambre. Mais pour n'être point vû, il faudroit fermer les volets des fenêtres, & ne laiſſer d'eſpace qu'autant qu'il ſeroit néceſſaire pour laiſſer paſſer les rayons des objets qu'on voudroit voir. Si on laiſſoit le Miroir dans la même diſpoſition pendant la nuit, & que la chambre fût fort éclairée, on pourroit voir de la rue tout ce qui s'y paſſeroit.

PROBLEME XVII.

Faire paroître dans un Miroir un autre objet que celui qui ſemble devoir y être repréſenté.

I.

PLacez une glace de Miroir plus élevée que la hauteur d'un homme, en l'inclinant tant ſoit peu à l'horiſon, s'il eſt néceſſaire: mettez quelque objet vis-à-vis de ce miroir, de maniere qu'il ſemble que les rayons de cet objet ayant frappé le miro'r, duſſent être renvoyez à l'œil. Au deſſus du premier objet placez un autre objet, qui ſera caché par quelque artifice, dont les rayons, pourtant ayant frappé le miroir, ſeront refléchis

vers les yeux des Spectateurs. Alors le miroir représentera autre chose que ce qu'il paroît devoir représenter. Si on a placé devant le miroir un cercle, il représentera un quarré. Ayant mis la statue d'un homme, on verra un lion, ou quelqu'autre animal; ou bien ayant placé une pendule qui marque une certaine heure, elle paroîtra marquer dans le miroir une heure tout contraire.

II.

On placera une grande glace, qui ira assez près du plancher, auquel on fera une ouverture entre des solives, avec assez d'artifice pour que ceux qui sont dans la chambre ne s'en apperçoivent point. On mettra quelque image fort éclairée dans la chambre au-dessus, de maniere qu'elle puisse être vûe dans le miroir par ceux qui y regarderont. On sera fort étonné de voir ces objets qui ne paroissent point dans la chambre.

Au lieu de mettre l'image dans une chambre au dessus du miroir, on peut la mettre dans une chambre à côté, en ménageant adroitement une ouverture dans la muraille de séparation.

REMARQUES.

C'est-là le fondement de ces curiosités d'Optique, qui donnent tant d'admiration aux Spectateurs. Lorsqu'on est dans une chambre entierement obscure, & qu'on regarde vers un côté où sont placées des glaces, dont on ne s'est point apperçû auparavant, à cause d'un rideau qni étoit au-devant, on voit avec étonnement le ciel représenté avec les étoiles, le soleil levant, des mers ou des lacs, des vaisseaux, des tours, des montagnes, des villes, des

Digitized by Google

canons, dont on apperçoit la lumiere, lorsqu'ils tirent pour rendre le salut aux vaisseaux qui passent. On y voit enfin tout ce qu'une adresse ingénieuse peut inventer pour donner un plaisir qui est d'autant plus grand, que l'on ne sçait point d'où viennent tous ces objets : l'esprit inquiet croit que c'est quelque enchantement, quoique ce spectacle agréable ne vienne que du lieu qui est au-dessus des Spectateurs.

PROBLEME XVIII.

Faire une boëte où l'on voye des objets tous différens de ceux que l'on avoit vû en regardant par une autre ouverture, quoique les uns & les autres paroissent occuper toute la boete.

IL faut faire une boëte qui ait plusieurs côtés, comme celle-ci AEDIHM, qui en a six. On séparera le dedans de la boëte en plusieurs cellules par des ais qui iront de chaque angle A, E, D, &c. au centre de la boëte G. Il y aura autant de séparations que de côtés, on appliquera à chacun de ces ais des Miroirs plats; on fera à chaque côté de la boete des ouvertures comme h 1, pour regarder dans les séparations; on mettra à ces ouvertures des morceaux de verre, dont la face qui sera au-dedans de la boete, ne doit point être polie, mais un peu usée, afin qu'on ne puisse pas voir ce qui est dans les cellules. On mettra dans ces cellules ou séparations les objets qu'on voudra : enfin on couvrira le dessus de cette boëte d'un parchemin fort mince, pour donner passage à la lumiere. Plan 23. Fig. 10.

Quand on regardera par une ouverture, on verra les objets de cette cellule représentés dans les miroirs, & l'on croira qu'ils occupent toute la

boëte; mais en regardant par une autre ouverture on y verra d'autres objets qui paroîtront encore occuper toute la boëte, & ainsi des autres.

REMARQUES.

Pour rendre plus transparent le parchemin qu'on met sur les machines d'Optique, il faut le laver plusieurs fois dans une lessive claire, que l'on changera à chaque fois: on le lavera pour la derniere fois dans de l'eau de fontaine. Enfin on le mettra secher à l'air, en le tenant étendu avec des cloux, ou avec des morceaux de bois.

Si on veut donner de la couleur à ce parchemin, on se servira pour le verd, de verd de gris délayé dans du vinaigre, avec un peu de verd foncé; pour le rouge, de l'infusion de bois de bresil; pour le bleu, du suc de jeunes mirtes; pour le jaune, de l'infusion faite avec des bayes de nerprun cueillies au mois d'Août. On passera de tems en tems un vernis sur le parchemin.

PROBLEME XIX.

Faire une machine d'Optique, où il paroîtra une gallerie, ou une allée d'arbres, &c. continuée à l'infini.

CEtte boëte, au lieu d'être poligone, comme celle qu'on vient de décrire, sera quarrée; on lui donnera environ un pied & demi de face, plus ou moins, selon qu'on le jugera à propos. On appliquera sur chaque face perpendiculaire intérieure des glaces: on fera au milieu d'une des faces une ouverture ronde d'environ un pouce de diamétre,

métre, & à cet endroit on ôtera l'étaim qui est sur la glace, afin qu'on puisse regarder dans la boëte: sur le fond intérieur, on mettra tels objets qu'on voudra, comme une galerie, une allée d'arbres, &c. accompagnées de bâtimens superbes, de jardins, de campagnes, de bois & autres ornemens qu'on imaginera: enfin on couvrira cette boëte d'un parchemin semblable à celui dont on a parlé dans le Problême précédent. En regardant par l'ouverture du milieu d'une des faces, il semblera que les objets mis au fond de la boëte, seront continués à l'infini. Si c'est une galerie, par exemple, composée de colonnes, on la verra très-longue, & allant toujours en diminuant; ce qui fait un très-bel effet.

REMARQUES.

A l'imitation de ces machines d'Optiques, on pourroit construire des cabinets revêtus de glaces, dont l'effet rempliroit les Spectateurs d'admiration. On a des glaces assez grandes pour faire ces sortes de cabinets. Ce seroit un Ouvrage superbe, & qui mériteroit l'attention des Curieux. Il faudroit au-dessus de ces glaces laisser des ouvertures qu'on fermeroit de quarreaux de verre, pour donner du jour dans ces cabinets.

Après les Problêmes qu'on vient de proposer, il ne sera point difficile d'imaginer des machines d'Optiques, qui seront composées de celles qu'on a décrites, & qui seront très-curieuses, à cause des différens objets vûs de diverses manieres, qui surprendront lorsqu'on les regardera.

Observations diverses sur les Miroirs plats.

I.

Dans un Miroir plat, ce qui est à droite paroît à gauche, & ce qui est à gauche paroît à droite, & lorsqu'on l'éleve au dessus de la tête, les pieds & le pavé paroissent en haut, tandis que la tête paroît en bas.

II.

Si on se regarde la tête dans un Miroir depuis le menton jusqu'au front, l'espace, qui comprend cette grandeur prise sur le Miroir, n'est que la moitié de cette grandeur même, c'est-à-dire, de la tête. La même chose arrivera à l'égard de tous les objets qui seront aussi éloignés du Miroir que l'œil en est éloigné.

III.

Si on approche un objet d'un Miroir dont la glace est épaisse, on y remarque deux images; l'une est bien éclairée, & l'autre est représentée avec une lumiere plus foible.

IV.

Lorsqu'on approche fort obliquement une bougie allumée de l'extrêmité d'un Miroir, & qu'on met l'œil à peu près aussi obliquement à l'extrêmité opposée, on apperçoit plusieurs images de la lumiere de la bougie, dont les uns sont plus foibles que les autres.

V.

Si on dispose à angles droits deux Miroirs, & qu'on s'approche de l'un en suivant une ligne qui lui soit perpendiculaire, il paroîtra que la même

personne se meut en sens contraire. Car dans celui qui est parallele à la personne qui marche, elle paroîtra aller d'un sens comme du Septentrion au Midi ; mais dans le Miroir dont elle s'approche, elle paroîtra aller d'un sens contraire, c'est-à-dire, du Midi au Septentrion.

VI.

Si deux Miroirs font un angle obtus un peu plus grand qu'un droit par rapport à celui qui regarde, il se verra avec un seul œil ; mais s'ils font un angle aigu un peu plus petit qu'un droit, il se verra avec trois yeux, deux nez, deux bouches, &c. l'angle des Miroirs étant plus obtus ou moins aigu, on verra d'autres figures grotesques.

VII.

Si on dispose dans un cabinet de jardin plusieurs Miroirs les uns plus bas & inclinés à l'horison, & les autres plus haut, aussi inclinés à l'horison, ceux qui entreront dans ce cabinet, se verront d'une figure monstrueuse.

VIII.

Les objets représentés dans un Miroir plat, paroissent autant enfoncés derriere le Miroir, qu'ils en sont éloignés par-devant. Ainsi pour voir un objet qui est dans un petit espace, comme s'il étoit fort éloigné, il faut lui faire faire plusieurs reflexions sur des miroirs disposés sur les faces d'un poligone.

IX.

Quand on présente quelque écriture à un Miroir, elle paroît d'un sens contraire. S'il y a ARREST, les lettres paroissent retournées, &

on lit du même sens qu'il faut les mettre dans les formes des Imprimeries.

PROBLEME XX.

Mesurer une hauteur par réflexion.

I.

Plan. 13. Fig. 54.

SI la hauteur est accessible, comme AB, en sorte qu'on puisse approcher de son extrêmité B, & connoître de combien on en est éloigné, lorsqu'on est dans un plan horisontal, & au niveau de cette base B; faites sur ce plan horisontal à une distance connue du point B, un petit creux C, que vous remplirez d'eau. Vous vous éloignerez de ce petit creux, de maniere que vous puissiez voir dans l'eau le sommet A de la hauteur à mesurer AB, par le rayon de réflexion CE, qui passe par l'œil que je suppose en E. Mesurez exactement la hauteur de l'œil ED, & sa distance CD du point C de réflexion. Nous supposerons la hauteur ED de 4 pieds, la distance CD de 3, & la distance BC de 48. Après quoi on dira par la regle de Trois directe, si la distance CD de 3 pieds donne 4 pieds pour la hauteur ED, combien donnera la distance BC de 48 pieds? & l'on trouvera 64 pieds pour la hauteur AB qu'on cherche; car en multipliant ensemble les deux derniers termes 4, 48, & en divisant leur produit 192 par le premier 3, il vient 64 pour le quatriéme proportionnel.

II.

Mais si la hauteur AB est inaccessible, en sorte qu'on ne puisse pas mesurer actuellement la distan-

Digitized by Google

ce BC, il faudra dans la même plaine faire en ligne droite sur CB prolongée, un autre creux à une distance connue du premier C, comme F, qu'on remplira pareillement d'eau. La même personne s'éloignera encore, de maniere qu'elle puisse voir le même sommet A, par le rayon de réflexion FH, qui passe par l'œil que je suppose en H. J'ai dit la même personne, afin que la hauteur de l'œil GH soit la même que la premiere DE, que nous avons supposée de 4 pieds. Comme nous avons supposé la distance CD de 3, si l'on suppose la distance CF de 32, & la distance FG de 5, en multipliant ensemble les lignes ED, CF, c'est-à dire, 4, 32, & en divisant le produit 128 par l'excès 2 de la distance FG sur la distance CD, on aura 64 pieds pour la hauteur AB qu'on cherche.

REMARQUE.

Si vous voulez connoître la distance BC, sans sçavoir la hauteur AB, multipliez ensemble les deux distances CD, CF, c'est-à-dire, 3 & 32 & divisez leur produit 96 par l'excès 2 de la distance FG, sur la distance CD. Le quotient donnera 48 pieds pour la distance BC.

Des Miroirs Cilindriques & Spheriques.

PROBLEME XXI.

Les points de l'œil & de quelque objet, avec le point de réflexion sur la surface convexe d'un Miroir Spherique, étant donnés, déterminer l'endroit où l'on doit voir l'image de l'objet proposé

SI l'œil est A, l'objet B, & E le point de réflexion sur la surface convexe DEL d'un Miroir Plan. 21. Fig. 69.

Plan. 21. Fig. 69. Sphérique, dont le centre est C ; tirez de ce centre C, à l'objet B, la droite BC, qui sera perpendiculaire à la surface du Miroir Sphérique. C'est dans cette ligne BC que sera l'image de l'objet B, sçavoir, au point H, qu'on trouvera en prolongeant le rayon de reflexion AE, qui rencontre ici au-dedans du Miroir la cathete d'incidence BC au point H : car il la peut rencontrer au point D de la surface du Miroir, & au dehors, sçavoir, lorsque l'angle d'incidence BEF, ou l'angle de réflexion AEG sera très-petit ; ce qui fait que l'objet B peut être vû au-dedans du Miroir Sphérique, comme ici, quelquefois en sa surface, & quelquefois au dehors.

SCHOLIE.

La touchante FG, qui passe par le point E de réflexion, détermine, comme vous voyez, les angles d'incidence & de réflexion, & coupe la cathete d'incidence BC en I, de telle sorte que les quatre lignes BC, CD, BI, DI, sont proportionnelles, & que par conséquent la ligne BC se trouve coupée aux points I, D, dans la moyenne & extrême raison proportionnelle, c'est-à-dire, que le rectangle sous toute la ligne BC, & sa partie du milieu DI, est égal au rectangle sous les deux autres parties extrêmes BI, CD, comme on le démontrera aisément, en tirant par le point B, la ligne BK parallele au rayon de reflexion AE.

Il est évident par la proprieté des foyers d'une Ellipse, que les deux points A, B, sont les foyers d'une Ellipse qui touche le Miroir spherique au point de réflexion E, & qui a pour grand axe la somme des deux rayons AE, BE, de réflexion & d'incidence. Ainsi pour trouver le point de réfle-

xion E, il n'y a qu'à décrire une Ellipse qui touche la circonférence DEL, & dont les foyers soient les deux points A, B : ce qui se peut aisément faire par l'intersection de la circonférence DEL, & d'une hyperbole entre ses asymptotes, dont l'opposée passe par le centre C de la même circonférence DEL, comme nous avons démontré dans notre *Dictionnaire Mathematique*. Plan. 21. Fig. 69.

Il est évident aussi, que l'apparence H de l'objet B est plus proche du point de réflexion E, que du centre C : car la ligne CH est toujours plus grande que la ligne EH, puisque l'angle CEH est toujours plus grand que l'angle ECH, comme on le connoîtra en prolongeant vers L le rayon d'incidence BE, & en lui tirant par le centre C, un parallele MN.

Il est encore évident, que la même apparence H de l'objet B est aussi plus proche du point de réflexion E, ou du point D, de la surface du Miroir que l'objet B, c'est-à-dire, que la ligne EH est moindre que le rayon d'incidence BE, & que la ligne DH est moindre que la cathete d'incidence BD.

Enfin il est évident, que si la grandeur OE est perpendiculaire à la surface du Miroir sphérique DEL, ensorte qu'étant prolongée elle passe par son centre C, le point P plus proche du Miroir, doit paroître moins enfoncé que le point O plus éloigné : & que cette grandeur OE doit paroître renversée & plus petite.

• D'où il suit qu'une grandeur doit paroître dans un Miroir sphérique convexe toujours plus grande à mesure qu'elle s'aproche du Miroir parallelement à soi-même, parce qu'alors elle paroît moins enfoncée, & par conséquent plus près de l'œil, &

qu'elle se trouve renfermée dans un plus grand angle. Il arrivera la même chose si l'objet demeure immobile, & que l'œil s'approche du Miroir, parce qu'alors il verra cet objet moins enfoncé dans le Miroir, & par conséquent plus grand, puisqu'il le verra de plus proche.

PROBLEME XXII.

Déterminer le lieu de quelque objet, vu par réflexion sur la surface d'un Miroir cylindrique.

Plan. 20. Fig. 67. CE Problême est assez difficile, parce qu'un Miroir cylindrique étant pris selon sa longueur peut être consideré comme un Miroir plan: étant pris exactement selon sa rondeur, il peut être consideré comme un Miroir sphérique: enfin étant pris en tout autre sens, il participe des proprietés d'un Miroir plan & d'un sphérique.

C'est pourquoi si l'œil & le point de quelque objet sont dans un plan qui passe par l'axe du Miroir cylindrique, ce point sera vû par réflexion dans le Miroir cylindrique, comme dans un Miroir plan, je veux dire aussi enfoncé dans le Miroir qu'il en sera éloigné.

Comme si l'on suppose l'œil B & un point A de quelque objet dans un plan qui passe par l'axe CD du Miroir cylindrique EFGH, ce point A sera vû par le rayon de réflexion BIM en M, qui est le point où se rencontrent ce rayon de réflexion & la ligne ALM perpendiculaire à la commune section EH du Miroir & du plan qui passe par l'œil & par le point de l'objet A. Dans ce cas, il est évident que l'objet A paroît aussi enfoncé dans le Miroir, qu'il en est éloigné, c'est-à-dire, que les

lignes AL, LM, ſont égales entr'elles, à cauſe des deux Triangles rectangles égaux AIL, MLI.

Mais ſi l'œil & le point de l'objet ſont dans un plan parallele à la baſe du Miroir cylindrique, comme la ſection de ce plan & du Miroir eſt un cercle, l'objet paroîtra dans ce Miroir cylindrique, comme nous avons vû qu'il devoit paroître dans un Miroir ſphérique. * D'où il ſuit que les grandeurs paralleles à la baſe d'un Miroir cylindrique y paroiſſent fort racourcies, & que celles qui ſont paralleles à l'axe du même Miroir, y paroiſſent preſque de la même grandeur, comme dans un Miroir plan. Cela eſt encore vrai dans un Miroir Coniqe, comme il eſt aiſé de le démontrer.

* Problêm. précédent.

PROBLEME XXIII.

Les points de l'œil & de quelque objet, avec le point de réflexion ſur la ſurface concave d'un Miroir Sphérique, étant donnés, determiner l'endroit où l'on doit voir l'image de l'objet propoſé.

Plan. 22 Fig. 71.

SI l'œil eſt A, l'objet B, & E le point de réflexion ſur la ſurface concave FEG d'un Miroir ſphérique, dont le centre eſt C, tirez de ce centre C, à l'objet B, la droite BC, qui étant prolongée, rencontre ici le rayon de réflexion AE, auſſi prolongé, au point H, qui ſera l'image ou la repréſentation de l'objet propoſé B, parce que ce point H eſt le contour du rayon de réflexion AE & de la cathete d'incidence CD, tirée du centre C par l'objet B.

REMARQUE.

Si l'objet avoit été plus près du Miroir, comme

Plan. 22. Fig. 71.

en K, son apparence I se seroit trouvée de l'autre côté, sçavoir, au concours du rayon de réflexion AE, & de la cathete d'incidence CI, tirée du centre C par l'objet K. Si l'objet étoit en L, on ne le verroit point du tout, parce que dans ce cas la cathete d'incidence FG, tirée du centre C par l'objet L, ne rencontreroit point le rayon de réflexion AE, ces deux lignes étant paralleles. Enfin si l'objet étoit en M, son apparence N se trouveroit en dehors, sçavoir, au concours du rayon de réflexion AE, & de la cathete d'incidence CN, tirée du centre C par l'objet M.

Par-là on voit la raison de ce que l'experience nous fait connoître, sçavoir, qu'un objet peut être vû par réflexion dans un Miroir concave, comme dans un convexe, hors de la surface du Miroir, comme est ici le point N, qui est l'image de l'objet M, & en dedans, comme H, qui est l'image de l'objet B, ou I qui est l'image de l'objet K. Ces deux images H, I paroissent enfoncées dans le Miroir, mais jamais tant que dans un Miroir plan. Cela vient des différens concours des rayons de réflexion, & des cathetes d'incidence, qui peuvent faire voir les objets quelquefois en la surface du Miroir, quelquefois en dedans, & d'autres fois en dehors & par devant, plus ou moins loin du Miroir, de sorte qu'on les voit tantôt entre l'objet & le Miroir, tantôt au lieu même où est l'objet ; ce qui fait que l'on peut manier l'image de sa main ou de sa face hors du miroir : tantôt plus loin du Miroir que l'objet n'en est éloigné : & tantôt au lieu même où l'œil est placé. D'où il arrive que ceux qui en ignorent la raison, ont peur, & se retirent quand ils voyent sortir du Miroir l'image d'une épée ou d'une dague ; que quelqu'un tient derriere eux.

Digitized by Google

Il est évident que la touchante OP, qui passe par le point E de réflexion, détermine l'angle d'incidence BEP, & son égal, ou l'angle de réflexion AEO : & que la ligne CE, qui est perpendiculaire à la touchante OP, divise en deux également l'angle AEB fait par les rayons d'incidence & de réflexion. D'où il suit que si l'on divise en deux également cet angle par une ligne droite, cette ligne droite passera par le centre C du Miroir Sphérique, parce qu'elle sera perpendiculaire à la touchante OP.

Il est aisé de juger que l'objet B peut être vû par réfléxion en deux endroits différens, lorsque l'œil est placé en un certain point : car si on mene un rayon d'incidence quelconque BE, avec son rayon de réflexion AE, & un autre rayon d'incidence BQ, avec son rayon de réflexion QR, qui rencontrera le premier en un point, comme A, où l'œil étant mis, il verra l'objet B par les deux rayons de réflexion AE, AQ, & par conséquent en deux endroits différens, sçavoir, aux points H, R, au dedans & au dehors du Miroir.

Il est aussi facile de juger que si l'objet est placé au centre C du Miroir, son image se réflechit contre lui-même : car dans ce cas l'angle d'incidence est droit. C'est pourquoi celui qui aura l'œil au centre C du Miroir, ne pourra voir autre chose que lui-même.

PROBLEME XXIV.

Des Miroirs ardens.

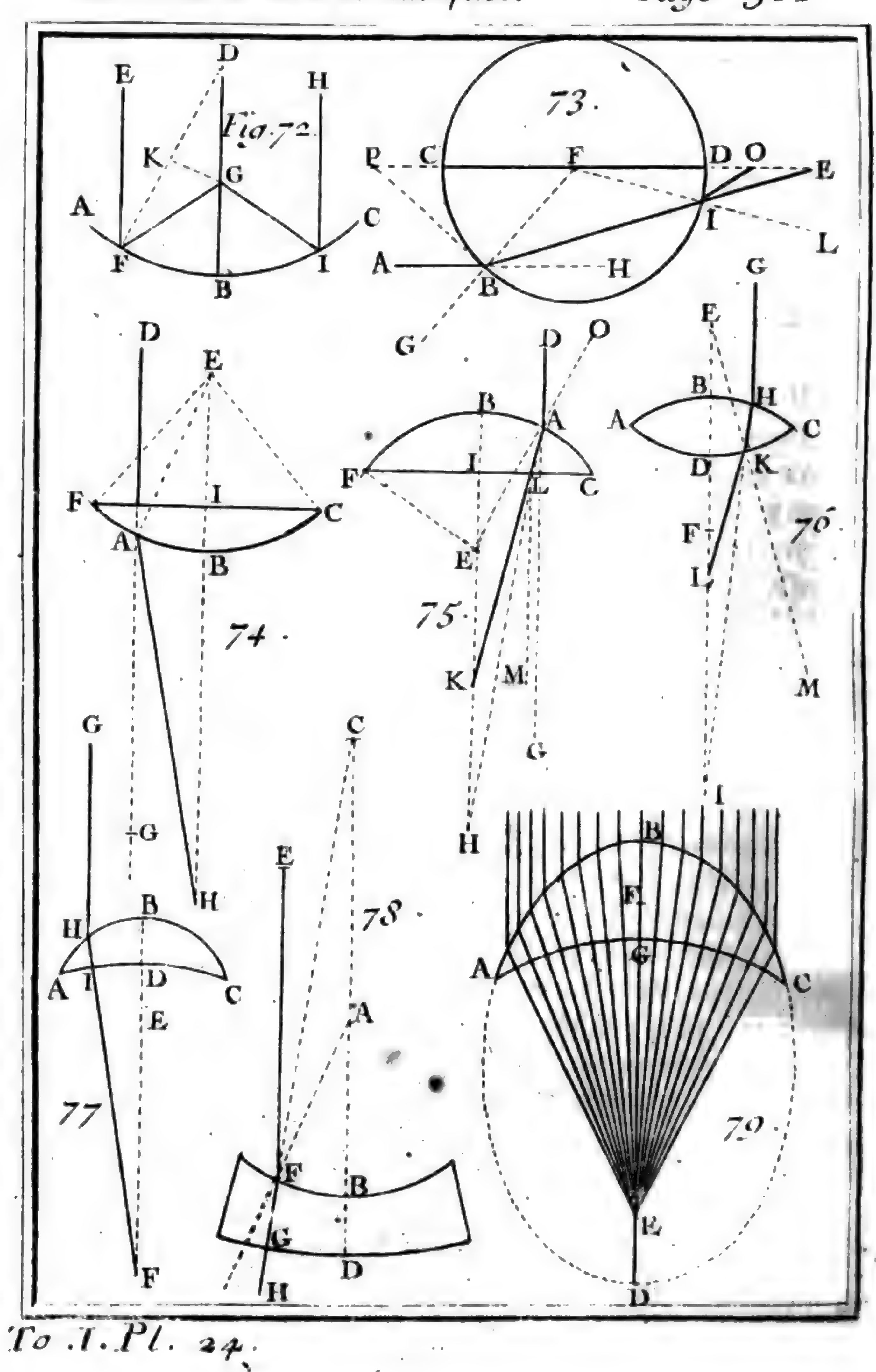
Nous avons vû dans le Problême précédent, que deux rayons de réflexion, qui appartien- Voyez le Probléme XIII. de Physique.

Plan. 22. Fig. 71. nent à un même objet, comme AE, AQ, qui appartiennent à l'objet B, s'unissent & se rencontrent au point A, au-devant du Miroir ; ce qui n'arrive pas aux Miroirs plans, où les rayons de réflexion s'écartent, & encore moins aux Miroirs convexes, où les rayons de réflexion s'écartant encore davantage, s'unissent au-delà du Miroir. D'où il suit quû par leur moyen on ne peut pas produire du feu, comme l'on fait avec un Miroir concave, qu'on appelle pour cela *Miroirs ardens*, & qui peut être parabolique ou sphérique.

Il est facile de faire des Miroirs sphériques, parce que le tour peut aisément servir à en faire des modeles, & qu'on peut aisément les polir : mais le tour ne peut pas être mis si facilement en usage, pour faire des modeles qui puissent servir à construire des Miroirs paraboliques ; ce qui fait qu'ils sont très-rares, & qu'ils ne sont pas si bons que les sphériques, quoique selon la Théorie, ils dussent être meilleurs. C'est pourquoi nous parlerons seulement ici des Miroirs sphériques.

Plan. 24. Fig 72. Soit donc ABC la surface concave d'un Miroir sphérique bien poli, dont le centre soit D, & un demi-diametre BD. Soit EF un rayon de lumiere parallele au demi-diametre BD, qui se réfléchissant par le rayon de réflexion FG, coupera le demi diametre BD en un point, comme G, plus proche de la surface du Miroir sphérique, que de son centre, c'est-à-dire, que la ligne BG sera toûjours plus petite que la ligne DG, comme on le connoîtra en tirant le demi-diametre DF, & menant GK perpendiculaire au milieu de DF : le Triangle FGD sera isoscele : les lignes DG, GF, seront plus grandes que DF, égal à BD. Ayant donc ôté DG de part & d'autre, il restera

Digitized by Google



To. I. Pl. 24.

Digitized by Google

GF, égal à DG, plus grand que GB. Plan. 24. Fig. 72.

Il est aisé de juger que si de l'autre côté il y a un rayon de lumiere HI parallele au même demi-diametre BD, & aussi éloigné de ce demi diametre BD, que le rayon EF, en sorte que les arcs BF, BI, soient égaux, ce rayon HI se réflechira par le rayon IG, qui passera par le même point G. Si ce rayon de lumiere étoit plus ou moins éloigné du demi-diametre BD, son rayon de réflexion ne couperoit pas ce demi-diametre BD au même point G; mais en quelque lieu qu'il le coupe, ce point de rencontre sera toujours plus éloigné du centre que de la surface du Miroir. Or, comme on peut concevoir une infinité de rayons différens paralleles entr'eux, & au demi-diametre BD, & également éloignés du même demi-diametre BD, il est évident que tous ces rayons doivent se réflechir en un même point, comme G, qu'on appelle *Foyer*. C'est dans ce point qu'on peut aux rayons du Soleil allumer une bougie, ou un flambeau, fondre en peu de tems quelque métal que ce soit, & vitrifier la pierre, quand le Miroir est un peu grand.

On peut aisément connoître par la Trigonométrie la distance de ce Foyer G à la surface du Miroir, la distance du rayon d'incidence ou de lumiere étant connue en dégrés, & le demi-diametre du Miroir étant connu en pieds ou en pouces. Comme si le rayon d'incidence EF est éloigné du demi-diametre BD, par exemple, de 5 dégrés en sorte que l'arc BF, ou l'angle BDF soit de 5 dégrés; & si l'on suppose le demi-diametre DB, ou DF de 100000 parties, on trouvera en ces mêmes parties la distance DG, en tirant du Foyer G la ligne GK perpendiculaire au demi-diametre DF,

Plan. 24. Fig. 72. qui sera divisé en deux également au point K ; ce qui fait que sa moitié DK sera de 50000 parties ; & en faisant dans le Triangle DKG cette analogie ;

Comme le Sinus total	100000
A la Secante de l'angle D	100382
Ainsi la ligne DK	50000
A la ligne DG	50191

Ce nombre 50191 étant ôté du demi-diametre BD, ou de 100000, il restera 49809 pour la ligne GB, ou pour la distance du Foyer à la surface concave du Miroir.

C'est de cette maniere que nous avons supputé la Table suivante, où l'on voit que le Foyer G s'approche toujours de la surface concave d'un Miroir spherique, à mesure que les rayons d'incidence s'éloignent du centre du Miroir ; de sorte que quand ils en sont éloignés de 60 degrés, le Foyer

1	49992	16	47985	31	41668	46	28022
2	49970	17	47715	32	41041	47	26686
3	49932	18	47427	33	40382	48	25276
4	49878	19	47269	34	39689	49	23787
5	49809	20	46791	35	38961	50	22214
6	49725	21	46443	36	38197	51	20549
7	49625	22	46073	37	37393	52	18787
8	49509	23	45682	38	36549	53	16918
9	49377	24	45268	39	35662	54	14935
10	49229	25	44831	40	34730	55	12828
11	49064	26	44370	41	33749	56	10586
12	48883	27	438[illegible]4	42	32798	57	8196
13	48685	28	43372	43	31634	58	5646
14	48468	29	42832	44	30492	59	2920
15	48236	30	42265	45	29289	60	0000

Digitized by Google

G se trouve précisément au point B de la surface concave du Miroir.

On voit aussi dans cette Table, que les rayons d'incidence, depuis un dégré jusqu'environ à 15 degrés de distance, s'unissent par réflexion presque en un même point, parce que la distance du Foyer G ne décroît pas sensiblement. Ce qui fait qu'une telle quantité de rayons envoyés du Soleil sur la surface concave d'un Miroir Spherique, qui peuvent passer pour paralleles, à cause de la grande distance du Soleil à la terre, se réflechit presque en un même point. Par conséquent tous les rayons de réflexion, qui se trouvent compris dans une portion concave de Sphere d'environ 30 degrés, peuvent par leur union produire du feu, comme l'expérience le montre.

On voit encore dans la Table précédente, que le Foyer G est éloigné de la surface concave du Miroir d'environ la quatriéme partie du diametre, ou de la moitié du demi-diametre DB, & que par conséquent un Miroir concave spherique doit brûler d'autant plus loin, que son diametre sera plus grand. Il ne faut pourtant pas croire qu'il puisse brûler à une distance énorme; car outre la difficulté qu'il y auroit à faire un Miroir assez grand, pour produire cet effet, les rayons de réflexion qui s'unissent en un très-petit espace vers G dans un petit Miroir, ne s'uniroient pas si parfaitement dans un grand Miroir, ce qui diminueroit considérablement la force des rayons. Ainsi il n'est pas croyable qu'Archimede se soit servi d'un Miroir concave pour brûler la Flote des Romains à une distance de 375 pas Géométriques, qui reviennent à 1875 pieds.

COROLLAIRE.

* Plan. 24. Fig. 71.

Il ſuit de ce qui a été dit dans ce Problême & dans le précédent que ſi l'on met un corps lumineux, comme une chandelle au Foyer G, ſes rayons ſe réflechiront par des lignes paralleles entr'elles & au demi-diamétre BD : & que ſi on la met au centre D, ſes rayons ſe réflechiront contr'eux-mêmes, parce qu'alors ils ſeront perpendiculaires à la ſurface du Miroir.

On peut par le moyen d'un ſemblable Miroir, repréſenter tels caracteres qu'on voudra ſur une muraille obſcure, pourvû que le miroir n'en ſoit pas fort éloigné. On écrira ſur la ſurface concave du Miroir avec de la cire ou autre matiere, des lettres renverſées, & d'un caractere un peu gros, & on expoſera le Miroir au Soleil, de maniere que les rayons renvoyés vers la muraille, y faſſent paroître les lettres, qui ſe trouveront dans leur ſituation ordinaire.

On peut auſſi par le moyen du même Miroir, augmenter la lumiere dans une grande chambre, en appliquant une bougie allumée au Foyer de ce Miroir; car les rayons de cette bougie ſe réflechiront par toute la chambre, & feront une telle clarté, qu'on pourra aiſément lire de loin ſur les murailles.

Enfin on peut ſe ſervir de la même façon de ce Miroir pour s'éclairer la nuit, & voir de bien loin ce qui ſe paſſe : il peut être utile à ceux qui veulent conſerver leur vûë, en ſe ſervant de la lumiere d'une lampe miſe au Foyer du Miroir, qui doit être placé un peu haut, & à côté, afin qu'il puiſſe envoyer commodément la lumiere de la lampe ſur la table où l'on veut lire, ou écrire.

Remarques

Digitized by Google

Remarques sur les Miroirs concaves.

I.

Les Miroirs ardens se font ordinairement de métal; la refléxion s'y fait plus facilement, & l'effet en est plus prompt & plus vigoureux. On peut aussi les faire de verre, la refléxion s'y fera presque aussi-bien, pourvû que le verre soit bien net, & un peu mince, que l'induit en soit bon, pour empêcher les rayons d'incidence de traverser & de se briser.

II.

Pour trouver facilement le foyer d'un Miroir concave, quand il est exposé aux rayons du Soleil, il faut éloigner ou approcher du miroir une petite piece de bois, ou de quelqu'autre matiere solide, en telle sorte que le disque de lumiere qui paroîtra par refléxion contre cette piece, paroisse le plus petit qu'il sera possible; car alors la piece se trouvera au foyer. Ou bieu on mettra de l'eau chaude auprès du miroir du côté de la concavité qui regarde directement le Soleil: la fumée, qui sortira de cette eau chaude, fera voir avec plaisir le cone de refléxion, dont la pointe sera le foyer. Ou bien encore on jettera de la poussiere au-devant de la concavité du miroir qui regarde directement le Soleil; on connoîtra dans cette poussiere, comme dans la fumée, le cone de lumiere refléchie, & par conséquent sa pointe, qui sera le foyer qu'on cherche. On peut même en hyver remarquer ce foyer & tout le cone de refléxion sans poussiere & sans fumée, lorsque l'air sera grossier & condensé par le froid.

III.

Quoiqu'il ſemble que pour produire du feu par le moyen d'un miroir concave, il doive être éclairé des rayons du Soleil, afin que la refléxion s'y puiſſe faire, on peut néanmoins en produire dans un lieu obſcur, en renvoyant les rayons du Soleil contre la concavité de ce Miroir par le moyen d'un miroir plan, qui doit être un peu grand, afin qu'un plus grand nombre de rayons, s'uniſſant au foyer, puiſſe brûler avec plus de force.

IV.

Wolfius remarque dans ſa Catoptrique, que Kirker étant à Siracuſe, avoit obſervé que la diſtance à laquelle les Vaiſſeau des Romains auroient dû être brûlés, n'étoit que de trente pas. Quoique cette diſtance ſoit bien moindre que celle qu'on a rapporté ſur la fin du Problême XXIV. elle eſt cependant encore aſſez conſidérable pour faire douter de la vérité du fait; puiſqu'Archimede auroit dû ſe ſervir d'une portion de Sphere dont le diamétre auroit eu plus de 120 pieds. Une telle portion de Sphere auroit fort approché de la figure plate, & par conſéquent elle n'auroit pû faire un grand effet. On dit encore que Proclus, par le même artifice qu'Archimede, brûla la Flote de Vitalien qui aſſiegeoit Biſance : mais la vérité de ces faits eſt fort incertaine, pour la raiſon qu'on vient de dire.

V.

Il vaut mieux s'en tenir à ce que dit le même Wolfius de quelques miroirs qui ſont très-remarquables. Manfrede Septala, Chanoine de Milan,

Digitized by Google

avoit un miroir parabolique, dont le foyer étoit à 15 ou 16 pas, où il brûloit des morceaux de bois. Vilette, Ouvrier de Lyon, avoit fait trois miroirs, dont les effets rapportés par Wolfius, sont très-dignes de remarque; leur foyer étoit assez large, & n'étoit éloigné que de trois pieds. L'un de ces miroirs fut présenté au Roy de Perse par Tavernier, connu par ses Voyages: l'autre fut achevé par le Roy de Dannemark, & le troisiéme fut donné au Roy de France. M. Tschirnaus en avoit fait un qui l'emportoit sur tous ceux-là: il étoit composé d'une lame de cuivre, qui n'étoit gueres plus épaisse que deux fois le dos d'une lame de couteau ordinaire: la largeur du miroir étoit d'environ trois aulnes de Lipsick, & son foyer n'avoit que deux de ces aulnes de distance. Voici quelques-uns de ses effets.

1°. Il mettoit le feu un moment à un morceau de bois mis à son foyer; la flamme exposée au plus grand vent, ne s'éteignoit point. 2°. Il faisoit bouillir l'eau avec tant de violence, que les œufs qu'on y mettoit étoient bien-tôt cuits, & si on laissoit l'eau un peu de tems, elle s'évaporoit entierement. 3°. Un morceau d'étaim ou de plomb présenté au foyer, se fondoit goute à goute, & étoit percé en deux ou trois minutes. 4°. Des lames de fer, d'acier, de cuivre, d'argent, &c. devenoient rouges sur le champ, & étoient percées en moins de six minutes. 5°. Les pierres, les briques, & les autres matieres qui ne se liquefient point, devenoient rouges comme un fer ardent. 6°. L'ardoise, les tuiles, les morceaux de pots cassés, qui avoient souffert un feu violent, les pierres de ponce, les morceaux de creuset, les os, les motes de terre se changeoient en verre.

VI.

A l'imitation du Miroir de M. Tſchirnaus, un Artiſan de Dreſde en fit quelques-uns de bois, qui produiſoient des effets preſque auſſi ſurprenans. Trabere rapporte qu'on peut faire des miroirs ardens avec des morceaux d'or * ou de verre. On les diſpoſe dans une jatte de bois, creuſée en forme de miroir ſphérique ; on les y attache avec de la poix mêlée de cire, dont on a enduit également le dedans de la jatte. Zahn rapporte auſſi qu'un Ingenieur, nommé Neuman, fit * à Vienne en Autriche un miroir concave, qui étoit composé de carton fort & de paille colés enſemble. Ce miroir avoit aſſez de force pour faire fondre toutes ſortes de métaux.

* Auro ſtrepero.

* En 1699.

VII.

Il y a du plaiſir à regarder dans les miroirs concaves, ſur-tout lorſque ce ſont des portions de grandes Spheres. Si on en approche d'aſſez près, on ſe voit une face fort large, un nez extrêmement long, de grands yeux, les cheveux & la barbe d'une groſſeur conſidérable ; le poil folet y paroît comme une groſſe barbe : enfin on remarque ſur le viſage les moindres taches, & des monticules ſur la peau qui paroît ſans miroir la plus unie. Si on s'éloigne du miroir à une certaine diſtance, on s'y voit renverſé. Si on ſe met à une autre diſtance, & qu'on avance la main ou une épée nue, on apperçoit l'image de la main ou celle de l'épée entre ſoi & le miroir : il ſemble qu'on ſe touche les doigts, & que l'épée même avance vers l'œil, quand on la porte vers le miroir. Un flambeau, préſenté derriere la perſonne qui regarde le miroir,

paroîtra lui venir brûler le visage. Peut-être y auroit-il quelque plaisir à voir les figures d'un Singe, à qui on présenteroit un miroir concave, & qui verroit sa pate & son image au dehors.

VIII.

Quand on place l'œil au centre du miroir concave, on ne voit qu'un grand œil représenté près de la surface du miroir. Si le miroir dont on se sert est une portion d'une petite Sphere, on s'y voit d'une figure monstrueuse avec deux nez, trois yeux, deux bouches, quelquefois avec des yeux qui n'ont qu'une seule paupiere, entre deux nez. On peut examiner ce qui arriveroit, si on enchâssoit un miroir concave entre deux miroirs plats, &c.

IX.

Si le verre du miroir est teint de quelque couleur, il la communique à celui qui se regarde; en sorte qu'on se voit pâle, cendré, livide, &c. suivant les couleurs qu'on a donné à la glace du miroir.

V. les Remarques du Problême XLII.

X.

Il seroit difficile de rapporter toutes les différentes situations où l'on peut placer le miroir, pour y représenter des figures surprenantes. Je me contenterai de rapporter celle-ci, qui est de placer un miroir fait d'une portion d'une grande Sphere au haut du plancher : on s'y verra comme pendu en l'air hors du miroir; la tête paroîtra en haut & les pieds en bas, dans la même situation qu'un pendu.

PROBLEME XXV.

Construire une chambre Optique, où l'on voye les objets plus grands que la boete.

Plan. 23. Fig. 11.

FAites une boete quarrée ABCDEFG, convenable pour le miroir concave, dont vous voulez vous servir : il faut que le centre du miroir tombe hors de la boëte, c'est-à-dire, qu'il faut que la largeur AD de la boëte soit plus petite que le rayon de la Sphere, dont le miroir est une portion. Couvrez le dessus de la boëte d'un parchemin transparant, comme celui qu'on a décrit au Problême XVIII. ou d'un verre bruni & non poli,* Appliquez à la face intérieure ABG un miroir concave, on doit préferer une portion de grande Sphere : placez à la face intérieure opposée DEFC, quelque image peinte, comme celle d'un homme, d'un Bâtiment, &c. menagez au haut de cette même face en IH une ouverture en long, que vous garnirez d'un verre poli. Lorsqu'on regardera par cette ouverture, on verra la peinture beaucoup plus grande que la boëte.

PROBLEME XXVI.

Faire le moule d'un Miroir concave Sphérique.

1°. AYant pris de la boue dessechée, & l'ayant réduite en poudre, passez-la au tamis, pour en ôter le gravier & les autres ordures.

2°. Détrempez cette poudre tamisée dans de

* On brunira ce verre, en le frottant sur une surface plane avec du menu sable broyé.

l'eau, & étant réduite en bouillie, paſſez-la par un bluteau, ou tamis.

3°. Prenez de la fiente de cheval & de la bourre, mêlez-la avec cette maſſe juſqu'à ce que ce compoſé ne faſſe plus qu'un corps d'une certaine conſiſtance. On y peut joindre du pouſſier ou de la brique bien pilée & paſſée au crible.

4°. Avec de la pierre qu'on trouve dans les ſablonieres, faites deux moules groſſierement ébauchés, dont l'une ſera convexe & l'autre concave : puis frottez l'un dans l'autre, juſqu'à ce qu'ils s'emboetent bien enſemble ; & pour y réuſſir plus aiſément, vous aurez ſoin de mettre entre ces deux moules du ſable mouillé, qu'il eſt bon d'avoir paſſé auparavant au crible, afin qu'il n'y reſte point de gravier, ni de petites pierres, qui pourroient gâter la ſurface des moules.

5°. Servez-vous d'un rouleau de bois pour étendre ſur une table ce lut ou cette maſſe ci-devant préparée, juſqu'à ce qu'elle ait l'épaiſſeur que vous voulez donner au miroir ſphérique. Ce lut étant ainſi étendu, vous le ſoupoudrerez de poudre de brique pilés, afin qu'il ne s'attache point au moule convexe, dont vous lui ferez prendre la figure, en le mettant dans ce moule.

6o. Après qu'il ſera ſec, vous le frotterez de quelque graiſſe, & le remplirez d'un couvercle fait de la même matiere, c'eſt-à-dire, du même lut.

7o. Ce couvercle étant ſec, vous ôterez le lut qui a la figure du miroir, & qui occupe la place qui eſt entre le moule de pierre & le couvercle, puis vous frotterez le dedans du moule de pierre d'une compoſition faite avec de la craie & du lait, & vous mettrez le couvercle deſſus.

8°. Mais pour empêcher que ce couvercle ne

tombe au fond du moule de pierre, vous y ferez un rebord, qui s'appuyera ſur le bord du moule de pierre, de maniere qu'étant poſé dans le moule de pierre, il y occupe la même place qu'il occupoit lorſque le moule du miroir y étoit.

9o. Enfin vous garnirez de fil de fer le dehors du moule de pierre, & vous menagerez au rebord deux trous, afin que quand on verſera la matiere du métal par l'un, l'air enfermé entre ces moules, puiſſe ſortir par l'autre.

PROBLEME XXVII.

Faire la compoſition que l'on employe aux Miroirs de métal.

PRenez huit parties d'un cuivre qui n'ait point encore ſervi, deux parties d'étaim d'Angleterre, & cinq parties de marcaſſie; faites-les fondre enſemble; puis vous prendrez au bout d'un fer chaud un peu de cette matiere fondue: ſi étant refroidie elle eſt trop rouge, vous y mettrez un peu d'étaim; mais ſi elle eſt trop blanche, vous y ajouterez un peu de cuivre, juſqu'à ce que la couleur ſoit convenable; enfin vous verſerez cette matiere fondue dans le moule préparé au Problême précédent.

REMARQUE.

On peut encore faire une autre compoſition avec dix parties de cuivre, quatre parties d'étaim d'Angleterre, quelque peu d'Antimoine & de ſel ammoniac; on remue cette matiere fondue avec une baguette ou eſpatule, juſqu'à ce qu'il en ſorte une vapeur, qu'il faut bien prendre garde de reſpirer, parce que c'eſt un poiſon.

Digitized by Google

PROBLEME XXVIII.

Polir les Miroirs de métal.

VOus ajuſterez avec de la poix noire une molette ou poignée de bois au Miroir de métal, & vous le frotterez ſur le moule rond de pierre, dont on a parlé au Problême XXVI, en y mettant d'abord du ſable ou grès broyé & mouillé. Quand le miroir ſera bien frotté, vous n'employerez plus de grès ; cependant vous frotterez juſqu'à ce que vous le voyez propre à être poli. Alors vous laiſſerez ſécher le moule rond de pierre, & quand il ſera ſec, vous l'envelopperez d'un papier blanc, ſur lequel vous mettrez du tripoli & de la potée d'étaim : vous frotterez le miroir juſqu'à ce qu'il ſoit bien poli.

REMARQUE.

On polit de la même maniere les miroirs de verre ; mais il faut les frotter dans le moule creux.

Du Saple ou Grès.

Le ſable ou grès dont on a parlé dans les Problêmes précédens, & dont on ſe ſert principalement pour travailler le verre & le polir, eſt fait avec des morceaux de meules à aiguiſer. On les broye pour les reduire en poudre : on doit avoir trois ou quatre ſortes de cette poudre, qui auront chacune leur degré de force, pour les employer ſelon la qualité de l'ouvrage qu'on veut faire. On les ſépare fort commodement de cette ſorte : on met tout le gros broyé dans un grand vaiſſeau plein d'eau, que l'on remue beaucoup

pendant quelque tems : on le laiſſe un peu repoſer ; pendant ce tems tout le plus gros va au fond. Alors inclinant promptement ce vaiſſeau, on verſe toute l'eau encore trouble dans un autre : on laiſſe auſſi repoſer cette ſeconde eau un peu de tems, puis on verſe cette eau dans un troiſiéme vaiſſeau, & ainſi de ſuite : de cette maniere on a le grès qui ſe trouve au fonds des vaiſſeaux dont on a verſé l'eau, & ces differens grès ont des degrés de force différens, ſuivant le nombre des vaiſſeaux où l'on a reçû ces eaux troubles, qu'on a laiſſé repoſer. On conſerve ces diverſes ſortes de grès dans des vaiſſeaux ſéparés.

Du Tripoli.

Le Tripoli eſt une pierre ou eſpece de terre ; le meilleur eſt celui qui vient d'Allemagne, & celui qu'on tire d'une montagne près de Rennes en Bretagne : mais le Tripoli qu'on apporte d'Auvergne n'eſt pas ſi eſtimé : de quelque endroit qu'il vienne, il faut choiſir le plus leger. On peut employer le Tripoli tel qu'on le tire de la terre ſans autre préparation, lorſqu'il a de bonnes qualités.

La ſeconde maniere de préparer le Tripoli, eſt de le broyer en le détrempaut avec de l'eau-de-vie, ou à ſon défaut avec du vin blanc, & d'en mettre une certaine quantité dans un vaiſſeau de verre bien bouché. Quand ce Tripoli aura reſté quatre ou cinq mois dans ce vaiſſeau, il ſera fort adouci : on en prendra ce qu'on jugera à propos pour en faire de petites maſſes, qu'on laiſſera ſécher à l'ombre. On s'en ſert à ſec, quoiqu'on puiſſe auſſi l'employer tel qu'on le retire du vaiſſeau où il aura été gardé.

La troisiéme maniere de préparer le Tripoli ſert à l'adoucir extrêmement, & à augmenter ſa qualité déterſive. On emplit de Tripoli deux creuſets, que l'on met l'un ſur l'autre : on les lute bien, tant à leur jointure que tout à l'entour ; enſuite on laiſſe ſécher le lut à l'ombre, afin qu'il ne ſe fende point. On met ces creuſets dans un four de Boulanger, où les ayant enterré dans la braiſe, on les laiſſe au moins pendant deux jours. C'eſt un excellent Tripoli, qui peut être employé ſec ou détrempé.

De la Potée d'étaim.

Il y a deux ſortes de Potée d'étaim, l'une qui eſt blanche, & l'autre qui eſt griſe. Celle-ci ſe fait avec des ratures d'étaim qu'on jette dans de l'eau forte, où elle ſe précipite, & ſe réſout en une pouſſiere grisâtre & très-ſubtile, mais cependant plus groſſiere que la blanche.

La Potée blanche ſe fait de cette maniere. On met de l'étaim fin d'Angleterre dans un pot de terre qui puiſſe réſiſter au feu : on couvre ce pot, & on le lute avec de la terre de potier bien corroyée & mêlée avec de la bourre. On laiſſe ſécher ce lut, puis on met le pot dans un four de Potier de terre, avec les autres vaiſſeaux ; on l'y laiſſe juſqu'à ce qu'il ſoit refroidi de lui-même. Cela étant fait, on trouve dans le pot une Potée très-blanche, qui n'eſt que l'Etaim parfaitement calciné. Voyez la Dioptrique oculaire, du P. Cherubin d'Orleans, p. 353, 354.

Des Spheres de verre, propres à produire du feu aux rayons du Soleil.

ON peut encore produire du feu aux rayons du Soleil avec une Sphere de verre de criſtal, ou de quelqu'autre matiere qui puiſſe facilement être pénétrée par la lumiere, comme avec de l'eau renfermée dans une bouteille bien ronde, ou avec une Sphere de glace. Ce feu n'eſt pas produit par refléxion, mais par réfraction, qui peut auſſi aſſembler en un point pluſieurs rayons de lumiere paralleles entr'eux. Ces rayons en entrant dans la Sphere ſe briſent en s'approchant de la perpendiculaire, & en ſortant de la Sphere ils ſe briſent de nouveau en s'écartant de la perpendiculaire. Ce qui les fait approcher du diamétre de la Sphere qu'ils rencontrent en dehors dans un point qui eſt le foyer: mais l'effet n'eſt pas ſi prompt, ni ſi vigoureux que dans un miroir ardent.

PROBLEME XXIX.

Trouver le Foyer d'une Sphere ou Boule de verre.

Plan. 24. Fig. 73. SOit BCD une Sphere ou Boule de verre, dont le centre ſoit F, & CD un diamétre. Soit un rayon de lumiere ou d'incidence AB, qui rencontrant la ſurface de la boule de verre en B, la pénetre, & entre dedans: mais au lieu de continuer ſelon la ligne droite ABH, comme il arriveroit, s'il ne rencontroit aucune réſiſtance, il ſe briſe en ce point B, lequel à cauſe de cela eſt appellé *point de réfraction*, & en s'approchant de la perpendiculaire GBF vers le centre F, il

Digitized by Google

continue ſelon la ligne BI. Cette ligne BI étant prolongée, rencontre le diamétre CD, auſſi prolongée au point E, qui ſeroit le foyer, ſi le rayon briſé BI ne ſe briſoit de nouveau au point I, par la ligne IO, qui, en s'écartant de ſa perpendiculaire IL, va rencontrer le diamétre CD au point O, qui eſt le foyer. Plan. 24. Fig. 73.

Avant que d'enſeigner à trouver ce foyer O, ou ſa diſtance DO à la ſurface de la Boule de verre, nous expliquerons ici quelques termes & quelques propriétés des angles briſés & des angles de réfraction dans le verre, qui ne ſont pas les mêmes dans les autres corps diaphanes, comme l'expérience le fait connoître.

Si la ligne AB eſt un *rayon d'incidence*, la droite BI s'appelle *rayon de refraction*, & l'angle HBI ſe nomme *angle de refraction*. La droite BG, qui eſt perpendiculaire à la ſurface de la boule, s'appelle *axe d'incidence*. La ligne BF, qui paſſe par le centre, & qui n'eſt que la ligne BG prolongée, ſe nomme *axe de réfraction*.

Le plan, qu'on imagine par le rayon d'incidence AB, & par le rayon de réfraction BI, s'appelle *plan de réfraction* : il eſt toujours perpendiculaire à la ſurface de la boule qu'on nomme *ſurfacerompante*, parce que le rayon d'incidence ſe briſe au point où il rencontte cette ſurface. Il eſt évident que le plan de réfraction paſſe par les axes d'incidence & de réfraction, & qu'il contient l'angle de réfraction HBI, l'angle IBF, qu'on appelle *angle briſe*, & l'angle ABG, qui ſe nomme *angle d'inclinaiſon*, lequel eſt toujours égal au complement de l'*angle d'incidence* ABP.

L'angle briſé croît ou décroît à meſure qne l'angle d'inclinaiſon eſt plus grand ou plus petit ;

Plan. 24. Fig. 73. de ſorte que quand l'un de ces deux angles eſt nul, l'autre angle eſt auſſi nul. Comme ſi la perpendiculaire BG eſt un rayon d'incidence, l'angle d'inclinaiſon ſera nul; ce rayon d'incidence GB en pénétrant le verre, ne ſe briſera point, mais continuera en ligne droite vers le centre F; ce qui fait que l'angle briſé eſt auſſi nul. Ainſi vous voyez que lorſque le rayon d'incidence eſt perpendiculaire à la ſurface rompante, il ne ſe fait aucune réfraction, parce qu'il n'y a aucune raiſon pour laquelle cette réfraction ſe doive faire plûtôt d'un côté que d'un autre.

Quoique l'angle briſé croiſſe à meſure que l'angle d'inclinaiſon augmente, néanmoins il ne croît pas de la même façon, c'eſt-à-dire, que ſi l'angle d'inclinaiſon augmente par exemple d'un degré, l'angle briſé n'augmentera pas auſſi d'un degré. Mais cette augmentation eſt telle, que les Sinus des angles d'inclinaiſon dans un même lieu ſont proportionnels aux Sinus de leurs angles briſés dans un autre milieu plus facile ou plus difficile à pénétrer : de ſorte que le Sinus d'un angle d'inclinaiſon eſt au Sinus de ſon angle briſé, comme le Sinus d'un autre angle d'inclinaiſon eſt au Sinus de ſon angle briſé. C'eſt pourquoi ſi l'on a une fois connu par expérience un angle briſé pour quelque angle d'inclinaiſon que ce ſoit, il ſera facile de connoître par ſupputation les angles briſés pour tous les autres angles d'inclinaiſon.

Parce que les deux lignes AH, CD, ſont paralleles, l'angle E eſt égal à l'angle de réfraction HBE : & parce que dans tout Triangle rectiligne les Sinus des angles ſont proportionnels à leurs côtés oppoſés, on connoît que le Sinus de l'angle briſé EBF, eſt à ſon côté oppoſé EF, comme

Digitized by Google

le Sinus de l'angle BFC, ou de l'angle d'inclinaison ABG, au rayon de réfraction BE. Et comme on a reconnu par expérience, que lorsque la Boule BCD est de verre, le Sinus de l'angle brisé EBF est au Sinus de l'angle d'inclinaison ABG, ou BFC, comme 2 est à 3, il s'ensuit que si la ligne EF est de 200 parties, le rayon de réfraction BE en doit contenir 300. Ainsi on peut facilement trouver par la Trigonométrie l'angle E, ou l'angle de réfraction HBE, l'angle brisé EBF, & le demi-diamétre BF, lorsque l'on connoît l'angle d'inclinaison ABG, ou son égal BFC, dans le Triangle obliquangle BEF, où trois choses sont connues ; sçavoir, le côté BE de 300 parties, le côté EF de 200, & l'angle BFE, qui est le reste à 180 degrés de l'angle BFC, qui est égal à l'angle d'inclinaison ABG, que l'on suppose connu.

Supposons que l'angle d'inclinaison ABG soit de 10 degrés, auquel cas l'angle BFE sera de 170 degrés, & qu'on veuille trouver l'angle brisé EBF, on fera cette analogie,

Comme le coté BE	300
Au Sinus de l'angle opposé BFE	17365
Ainsi le côté EF	200
Au Sinus de l'angle brisé EBF	11577

qui se trouvera d'environ 6°, 39', & qui étant ôté de l'angle BFC, ou de l'angle d'inclinaison ABG, que nous avons supposé de 10 degrés, donnera 3° 31' pour l'angle de réfraction HBE, ou pour l'angle E, qui servira à trouver le demi-diamétre BF, par cette analogie,

Plan. 24. Fig. 73.

Comme le Sinus de l'angle BFE 17365
A ſon côté oppoſé BE 300
Ainſi le Sinus de l'angle E 5843
A ſon côté oppoſé BE 101

Mais ſi le demi-diamétre BF eſt déja connu, comme s'il avoit 100 parties, on trouvera dans les mêmes parties la ligne EF, en faiſant dans le même Triangle BEF, cette analogie,

Comme le demi-diamétre BF 101
A la ligne EF 200
Ainſi le même demi-diamétre BF 100
A la même ligne EF 198

à laquelle ajoutant le demi-diamétre FC, 100, on aura 298 pour la ligne CF.

C'eſt de cette maniere qu'on a ſupputé la Table ſuivante, où l'on trouve vis-à-vis de l'angle d'in-

ABG	EBF	HBE	CE	ABG	EBF	HBE	CE
1	0. 40	0. 20	300	11	7.18	3. 42	297
2	1. 20	0. 40	300	12	7 58	3. 2	297
3	2. 0	1. 0	300	13	8,38	4. 22	297
4	2. 40	1. 20	300	14	9.16	4. 44	296
5	3. 20	1. 40	300	15	9.56	5. 4	295
6	4. 0	2. 0	299	16	10.35	5. 25	295
7	4. 40	2. 20	299	17	11.14	5. 46	294
8	5. 19	2. 41	398	18	11.53	6. 7	293
9	5. 59	3. 1	298	19	12.32	6. 28	292
10	6. 39	3. 21	298	20	13.11	6. 49	292

clinaiſon ABG, la quantité de l'angle briſé EBF, &

& de l'angle de réfraction HBE, avec celle de la ligne CE; le diametre CD de la Sphere de verre étant supposé de 200 parties. Planc. 24. Fig. 73.

Nous n'avons pas prolongé cette Table au-delà du vingtiéme degré d'inclinaison, parce qu'elle suffit pour faire voir en quelle proportion la ligne CE décroît, car elle décroît fort lentement, étant par-tout à peu près égale à trois demi-diametres, puisque sa plus grande différence n'est qu'environ la vingt-cinquiéme partie du diametre; ce qui fait que la ligne DE est presque égale au demi-diametre de la même Sphere, c'est-à-dire, à la ligne DF.

Cette ligne DE, qui se trouve de 92 parties pour un angle d'inclinaison de 20 degrés, comme on le connoît en ôtant CD de CE, ou 200 de 292, servira à trouver le foyer O. Mais il faut remarquer auparavant que l'angle brisé EBF est presque double de l'angle de réfraction HBE; & que cet angle de réfraction HBE est à peu près égal à la troisiéme partie de l'angle d'inclinaison ABG, comme on le voit sans peine dans la Table précédente.

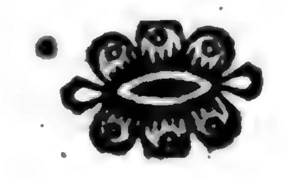
Pour trouver le foyer O, on considerera que puisque les lignes DE, DF, sont presque égales, les angles IEF, IFE, étant à peu près égaux, ce qui fait que l'angle EIL, qui leur est égal, est presque double de chacun, & par conséquent de l'angle E. Cela étant supposé, si on considere la ligne OI comme un rayon d'incidence, en sorte que l'angle OIL soit un angle d'inclinaison, alors la ligne IB sera un rayon de réfraction, l'angle OIE sera un angle de réfraction, & l'angle EIL un angle brisé. On connoîtra aussi que cet angle brisé EIL est double de l'angle de réfraction EIO, comme nous avons remarqué auparavant.

Plan. 24. Fig. 73.

D'où il suit que les deux angles E, EIO, sont égaux entr'eux, & que par conséquent les lignes OE, EI, sont aussi égales entr'elles. Et parce que la ligne OI est presque égale à la ligne OD, la ligne OE sera aussi presque égale à la ligne OD. Ainsi le foyer O est à peu près au milieu de la ligne DE, & par conséquent la ligne DO est égale à la moitié de la ligne DE, ou du demi-diametre DF. Si donc on prend sur le diametre prolongé la ligne DO égale à la moitié du demi-diametre DF, ou au quart du diametre CD, on aura en O, le foyer qu'on cherche.

REMARQUES.

L'angle EBF, qui est un angle brisé à l'égard du rayon d'incidence AB, qui sortant de l'air pour entrer dans le verre, se brise par la ligne BE, qui est un rayon de refraction, devient un angle d'inclinaison à l'égard du rayon d'incidence IB, qui sortant du verre pour entrer dans l'air, se brise réciproquement par la ligne AB, qui sera un rayon de réfraction. Et comme cet angle EBF est double de l'angle de réfraction HBE, on voit que lorsqu'un rayon d'incidence sort du verre pour entrer dans l'air, l'angle d'inclinaison est double de l'angle de réfraction; ce qu'il est bon de remarquer, parce que cela nous servira pour le Problême suivant.



Digitized by Google

Des Lentilles de verre, propres à produire du feu aux rayons du Soleil.

LEs Lentilles de verre qui servent à produire du feu, étant exposées directement aux rayons du Soleil, peuvent être plates d'un côté & convexes de l'autre, comme un segment de Sphere; ou bien convexes des deux côtés, comme les lunettes des vieillards, & les microscopes qui grossissent extraordinairement les objets, & servent à découvrir les moindres parties & plus petits corps de la nature; ou bien convexes d'un côté & concaves de l'autre: celles-ci ne sont pas si utiles que les autres, parce qu'elles ne peuvent servir à produire du feu que quand leur convexité est tournée directement au Soleil; car lorsque leur concavité regarde le Soleil, les rayons de réfraction au lieu d'être *convergens* deviennent *divergens*, c'est-à-dire, qu'ils s'écartent les uns des autres; ce qui les empêche de s'unir, & de produire du feu, comme nous ferons voir dans la suite.

PROBLEME XXX.

Trouver le foyer des Lentilles de verre convexes d'un côté & planes de l'autre, faites en forme de segment de Sphere.

I.

EXposons premierement au Soleil la surface plane FC de la Lentille de verre FBC, dont la convexité FBC a son centre E dans l'axe d'incidence EBH, qui divise l'arc FBC en deux également au point B, & sa corde FC aussi en deux également au point I. C'est aussi dans cet axe EH Plan. 24. Fig. 74.

Digitized by Google

Plan. 24. Fig. 74. que se trouve le foyer H de tous les rayons d'incidence qui lui sont paralleles, & par conséquent perpendiculaires à la surface plane FC. Ce foyer H, ou sa distance BH depuis la convexité du Miroir, se déterminera en cette sorte.

Soit un rayon d'incidence DA, lequel étant parallele à l'axe d'incidence EH, tombera sur la surface plane FC à angles droits, & la traversera par conséquent sans se briser; mais étant parvenu au point A de la surface convexe, il se brisera en sortant du verre; & au lieu d'aller droit en G, il se détournera par le rayon de réfraction AH, qui coupera l'axe d'incidence EH au point H, où tous les autres rayons d'incidence, paralleles au rayon DA, s'uniront par réfraction, pourvû néanmoins que l'arc BC ou BF ne soit pas plus grand que 20 degrés; car les rayons de réfraction ne s'uniroient pas au même point H, mais plus près du point B, si ces arcs étoient plus grands que 20 dégrés, comme on l'a vû dans le Problême précédent. Ainsi le point H sera le foyer, parce que c'est le lieu où les rayons du Soleil s'unissant par réfraction, peuvent produire du feu.

Cela étant supposé, on considerera que l'angle d'inclinaison DAE, ou son égal AEH étant double de l'angle de réfraction GAH, ou AHE son égal, comme nous avons vû au Problême précédent, le Sinus de l'angle AEH sera presque double du Sinus de l'angle AHE, à cause de la petitesse de ces angles. Mais parce que dans un Triangle rectiligne les côtés sont proportionnels aux Sinus de leurs angles opposés, le côté AH sera aussi presque double du côté AE, & comme le côté AH approche d'être égal à la ligne BH, il s'ensuit que la distance BH du foyer H à la surface convexe

FBC est presque double du demi-diametre AE, ou BE, & que par conséquent toute la distance EH est à peu près triple de ce demi-diametre.

II.

Mais si l'on tourne la partie convexe FBC vers le Soleil, le rayon DA, & tous les autres paralleles à l'axe d'incidence EB, se briseront deux fois avant que de s'unir au point K, qui sera le foyer; une fois en entrant dans le verre par la ligne AH; qui s'approche de la perpendiculaire EAO, & une seconde fois en sortant du verre par la ligne LK, qui s'écarte de la perpendiculaire LM. Plan. 24. Fig. 75.

Il est évident, par ce qui a été dit au Problême précédent, que dans la premiere réfraction l'angle d'inclinaison DAO, ou AEB, est triple de l'angle de réfraction GAH, ou AHE, & que par conséquent la ligne AH est triple du demi-diametre EA. Mais parce que la ligne AH est presque égale à la ligne BH, cette ligne BH sera aussi presque triple du même demi-diametre AE, ou BE, comme auparavant: ce qui fait connoître que le foyer seroit en H, s'il n'y avoit qu'une réfraction; mais comme il y en a deux,

Il est évident aussi par la remarque du Problême précédent, que dans la seconde réfraction HLM, ou KHL est double de l'angle de réfraction KLM; par conséquent la ligne KL est double de la ligne KH. Et parce que la ligne KL est presque égale à la ligne KB, lorsque la Lentille BI est fort mince, comme nous la supposons ici, cette ligne KB est aussi presque double de la ligne KH; par conséquent toute la ligne BH est à peu près triple de la ligne KH. Mais nous avons reconnu que la même ligne BH est aussi tr ipledu

demi-diametre BE ; il s'ensuit donc que ce demi-diametre BE est égal à la ligne KH, & par conséquent la ligne KB est double du demi-diametre BE, ou égale à tout le diametre. Si donc on porte le demi-diametre EB depuis le centre E en K, ce point K sera le foyer qu'on cherche.

PROBLEME XXXI.

Trouver le foyer des Lentilles de verre, convexes des deux côtez.

Plan. 24. Fig. 76.

POur trouver le foyer de la Lentille de verre ABCD, dont l'axe EI passe par le centre E de la convexité ADC, & par le centre F de la convexité ABC, tirez un rayon quelconque d'incidence GH parallele à l'axe EI, & ayant pris sur cet axe la ligne BI triple du demi-diametre BF; menez la droite HI, qui donnera le point K de la seconde réfraction. Par ce point K tirez du centre E la droite EKM, qui sera perpendiculaire à la surface rompante ADC. La ligne IK étant considerée comme un rayon d'incidence, l'angle IKM sera un angle d'inclinaison, lequel est double de l'angle de réfraction, comme il a été remarqué au Problême précédent: si donc on fait en K l'angle IKL égal à la moitié de l'angle IKM, on aura en L le foyer qu'on cherche, à l'égard de la convexité ABC exposée au Soleil.

REMARQUE.

Lorsque les demi-diametres ED, BF, seront égaux entr'eux, c'est-à-dire, lorsque les convexités ABC, ADC, seront des portions égales de

Digitized by Google

la superficie d'une même Sphere, le foyer se trouvera à peu près au centre F de la convexité ABC exposée au Soleil, ou au centre E de la convexité ADC tournée vers le Soleil. Mais soit que les demi-diametres ED, BF, soient égaux ou inégaux, la distance du foyer L sera toujours la même, en tournant vers le Soleil celle qu'on voudra des deux convexités ABC, ADC.

PROBLEME XXXII.

Trouver le foyer des Lentilles de verre, convexes d'un côté, & concaves de l'autre.

I.

LE foyer d'une semblable Lentille se trouve comme dans la précédente, lorsque sa convexité regarde le Soleil. Mais il y a une méthode abregée pour le trouver, quand le diametre de la concavité est triple de celui de la convexité. Alors le foyer se trouve éloigné d'un diametre & demi, ou de trois demi-diametres de la convexité, que nous supposons tournée vers le Soleil, c'est-à-dire, qu'il est au centre de la concavité, en considerant l'épaisseur de la Lentille comme très-petite. Plan. 24. Fig. 77.

Proposons la Lentille de verre ABCD, telle que le demi-diametre EB de la convexité ABC, qui est exposée au Soleil, soit la troisiéme partie du demi-diametre FD de la concavité ADC. Cela étant, je dis que tous les rayons d'incidence paralleles à l'axe BF, comme GH, s'uniront par réfraction au centre F de la concavité ADC : car ce rayon GH, traversant le verre, se brisera par la droite HI, qui étant continuée passeroit par le point F, éloigné de la convexité ABC de trois

Digitized by Google

demi-diametres, comme on l'a vû auparavant. Mais ce rayon de réfraction HF, se trouvant perpendiculaire à la surface concave ADC, ne se brisera point en I, lorsqu'il sortira du verre; il continuera directement vers le point F, lequel par conséquent sera le foyer qu'on cherche.

II.

Plan. 24. Fig. 78. Mais si l'on tourne la concavité vers le Soleil, le foyer se trouvera de même que dans les articles précédens. On pourra aussi le trouver par une methode plus courte, lorsque le demi-diametre AB de la concavité sera la troisiéme partie du demi-diametre CD de la convexité. Dans ce cas, le foyer se trouvera au centre C de la convexité, lorsque l'épaisseur BD de la Lentille ne sera pas considerable; ce qu'il faut toujours supposer, comme on le connoîtra par un raisonnement semblable au précédent. Mais on ne peut tirer aucune utilité d'une telle Lentille exposée au Soleil, puisque ses rayons de réfraction s'écartent, au lieu de s'unir. Ainsi le point C n'est appellé foyer qu'improprement, parce que les rayons de réfraction ne peuvent pas s'assembler en ce point, qui est du côté du Soleil; mais ils s'écartent par des lignes qui tendent à se réunir en ce point.

REMARQUES.

I.

Ce foyer C, qui ne peut servir à produire du feu, est appellé *foyer virtuel*, pour le distinguer du *foyer veritable*, où les rayons du Soleil s'unissant par réfraction, peuvent produire du feu.

On peut trouver ce foyer véritable par cette

analogie, qui ſuppoſe que l'épaiſſeur de la Lentille, dont la convexité regarde le Soleil eſt très-petite.

Comme la différence des demi-diametres de la concavité & de la convexité ;
Au demi-diamétre de la convexité ;
Ainſi le diamétre de la concavité ,
A la diſtance du foyer à la Lentille.

II.

Dans une Lentille convexe des deux côtés, le foyer qui eſt toûjours véritable ſe peut trouver par cette analogie, qui comme la précédente, ſuppoſe que l'épaiſſeur de la Lentille eſt très-petite.

Comme la ſomme des demi-diamétres des deux convexités ,
Au demi-diamétre de l'une des convexités ;
Ainſi le diamétre de l'autre convexité ,
A la diſtance du foyer à la Lentille.

III.

Cette analogie ſervira auſſi à trouver le foyer d'une Lentille concave des deux côtés ; mais comme ce foyer n'eſt que virtuel dans cette eſpece de Lentilles, auſſi-bien que dans celles qui ſont plates d'un côté, concaves de l'autre, nous n'en parlerons pas davantage.

IV.

Si l'on fait une Lentille de verre ABCG, concave d'un côté, & convexe de l'autre, en ſorte que la convexité ABC ſoit la ſurface d'une portion de Spheroïde produit par la circonvolution Plan. 24. Fig. 79.

Plan. 24. Fig. 79. de l'Ellipse ABCD, autour de son grand axe BD, qui soit à la distance EF, des deux foyers E, F, de l'Ellipse, comme 3 est à 2, & dont la concavité AGC ait pour centre le foyer E; en exposant cette Lentille aux rayons du Soleil, en sorte que sa convexité ABC regarde directement le Soleil, tous les rayons d'incidence qui seront paralleles au grand axe BD, s'uniront par réfraction au foyer E, lequel par conséquent sera le foyer véritable de cette Lentille Spherico-Elliptique. Sa convexité se peut aussi faire hyperbolique; mais cela est trop spéculatif pour des Récreations Mathématiques. Voyez la Dioptrique du Pere Dechales.

V.

Ce seroit ici le lieu de parler des grands Verres ardens de M. Tschirnaus, & principalement de celui que ce Gentilhomme Saxon a vendu à M. le Duc d'Orleans; mais il trouvera sa place dans les Problêmes de Physique, où l'on aura encore occasion de parler des Lentilles & de leurs effets. On ajoutera cependant quelques effets de ces Verres, dont il est fait mention dans les Actes des Sçavans de l'année 1697, page 415 & suivantes. Le bois le plus dur, humecté même d'eau, mis à leur foyer, prend feu en un moment; l'eau bout aussitôt qu'elle y est présentée, pourvû qu'elle soit contenue dans un petit vase; les métaux se fondent; les briques, la pierre de ponce, la porcelaine d'Hollande & l'asbeste se change en verre; le soufre, la colophane, la poix & les autres matieres de même nature, se liquefient en eau; les charbons & les cendres se vitrifient: en un mot, tout ce qu'on presente au foyer de ces Verres ardens se fond, ou se change en chaux, ou s'évapore dans l'air.

Digitized by Google

Comme ces Lentilles ſont fort grandes, on a ſoin, pour faire ces expériences, d'ajouter une petite Lentille vers le foyer de la grande, afin de raſſembler en un eſpace plus proche les rayons rompus.

PROBLEME XXXIII.

Repréſenter dans une chambre fermée les objets de dehors avec leurs couleurs naturelles, par le moyen d'une Lentille de verre convexe des deux côtés.

AYant fermé la porte & les fenêtres de la chambre, en ſorte que toutes les avenues ſoient bouchées à la lumiere, excepté un petit trou que l'on fera à une fenêtre qui réponde ſur quelque place fréquentée, ou ſur quelque beau jardin, ſi cela ſe peut; appliquez à ce trou une Lentille de verre convexe des deux côtés, qui ait fort peu d'épaiſſeur, afin que ſon foyer ſoit plus éloigné, comme un verre des lunettes dont ſe ſervent les vieillards. Alors les images des objets de dehors, qui paſſeront au travers de ce verre étant reçûes ſur un linge blanc tendu à plomb, ou ſur un carton bien blanc placé au foyer du même Verre, y paroîtront avec leurs couleurs naturelles, & même plus vives que le naturel, ſur-tout lorſque le Soleil les éclairera. Il ne faut point que le Verre ſoit expoſé au Soleil, parce que la trop grande lumiere frappant le Verre empêcheroit de diſcerner avec plaiſir les images des objets extérieurs, qui ſans cela s'y diſtingueront d'une telle maniere avec leurs mouvemens, que l'on pourra ſans peine diſcerner les hommes d'avec les animaux qui paſſe-

ront, & même un homme d'avec une femme, remarquer les oiseaux qui voleront en l'air & connoître s'il y a du vent par le tremblement des herbes ou des feuilles des arbres, qui se rendra sensible sur le linge ou sur le carton.

REMARQUE.

I.

On peut aussi sans Verre distinguer sur une muraille de la chambre, ou sur le plancher, les images des objets extérieurs, & principalement de ceux qui sont en mouvement; mais ces images ne paroissent pas avec tant d'agrément & de distinction, parce que leurs couleurs ne sont que sombres & mortes. Or de quelque maniere qu'on les voye, elles paroîtront toujours renversées; mais on les peut redresser en plusieurs manieres: ce qui ne sert pourtant de rien, parce que cela n'augmente pas le plaisir qu'il y a de les voir avec un Verre dans leurs couleurs naturelles, & ne diminue en rien l'usage qu'on en tire, qui est que l'on peut représenter en racourci sur le carton les païsages, & tout ce qui pourra envoyer son image sur ce carton. Ce qui se fera en passant un crayon sur tous les traits de cette représentation, qui paroîtra comme en perspective, dont les parties seront d'autant mieux proportionnées, que la Lentille de verre sera moins épaisse par le milieu, & que le trou par où les especes passent pour entrer dans le Verre, sera petit. Ce trou ne doit pas avoir une épaisseur considérable; c'est pourquoi il doit être fait dans une platine de métal bien mince, qu'on appliquera contre le trou de la fenêtre, qu'il est bon de faire un peu grand, afin de don-

Digitized by Google

ner un passage libre aux especes ou images des objets de dehors, qui seront de côté.

II.

On peut aussi voir dans une chambre, dont les fenêtres seront fermées, pourvû que la porte soit ouverte, ce qui se passe au dehors par le moyen de plusieurs Miroirs plans, qui pourront se communiquer par réflexion les especes l'un à l'autre, &c.

III.

J'ai oublié de dire, que par cette maniere de représenter sur une surface les images des objets avec une Lentille de verre, les Physiciens expliquent comment se fait la vûe, en prenant le creux de l'œil pour la chambre fermée, le fond de l'œil, ou la retine pour la surface qui reçoit les especes, le cristallin pour la Lentille de verre, & le trou de la prunelle pour le trou de la fenêtre par où passent les especes ou images des objets.

IV.

L'œil artificiel représente beaucoup mieux l'œil naturel que cette chambre fermée. On va le décrire tel qu'il est décrit dans les *Expériences Physiques * de M. Poliniere*, qui nous a communiqué dans ce Livre ses découvertes sur la Physique, avec plusieurs autres, qu'il a rendu fort claires, tant par l'exposition des expériences, que par leur explication.

* Page 472. seconde édition.

AB est une boule de bois creuse, qu'on peut séparer en deux parties en DE; son diametre est d'environ 5 à 6 pouces. En BC est un Verre len- Plan. 23. Fig. 12.

ticulaire, dont le foyer en est éloigné de 5 pouces ou environ. FA est un tuyau collé à la boule AB en AH : ce tuyau est de 8 à 9 pouces de long, & à 2 pouces & demi de diametre. GA est un tuyau qui entre dans l'autre FA, & qui porte à son extrêmité AH un papier huilé, ou un verre plan, qui a été un peu dépoli en le frottant sur une surface plane avec du sable broyé. Ce verre est appliqué au bout du tuyau mobile GA, pour être facilement placé au foyer du verre CB.

Si l'œil est placé vers G pour regarder le verre AH, en repoussant un peu, ou en retirant le tuyau G, il appercevra distinctement les objets exterieurs peints sur le verre AH dans une situation renversée.

On voit que dans cet œil artificiel la Lentille BC tient la place des humeurs de l'œil, & le verre bruni ou papier huilé AH, celle de la retine, que l'on croit vraisemblablement transmettre au cerveau les images qui y sont peintes.

V.

Pour bien voir ces images dans l'œil naturel, il faut séparer un œil de mouton de chairs & peaux dont il est entouré,& couper un peu du fond de cet œil pour découvrir l'humeur vitrée. Alors y ayant mis un petit morceau de papier huilé, & ayant placé le devant de cet œil à une petite ouverture de fenêtre d'une chambre fermée, l'image des objets éclairés paroît sur ce papier dans une situation renversée. Cet œil étant de même exposé vis-à-vis d'une bougie allumée, l'image de la flamme paroît renversée sur ce papier; les objets proches sont mieux représentés que les objets éloignés.

Digitized by Google

L'œil de mouton est préferable à celui de bœuf ou de veau, parce que la prunelle des moutons ou des brebis ne se ferme pas tant en mourant que celle des bœufs.

PROBLEME XXXIV.

Construire une chambre obscure qu'on puisse transporter.

Faites une caisse de bois ABCD, à laquelle vous donnerez environ 9 pouces de largeur, & 2 ou 3 pieds de longueur plus ou moins, selon la distance des foyers des Lentilles dont vous voulez vous servir. Ajustez à l'un des côtés un tuyau EF, ou plusieurs qui s'enboëtant l'un dans l'autre, puissent s'alonger ou s'accourcir, selon le besoin : vous appliquerez dans ces tuyaux deux, ou même trois Lentilles convexes des deux côtés. Les foyers des Lentilles extérieures auront environ 7 pouces de distance, & celui de la Lentille intérieure aura environ 5 pouces. Vous attacherez un papier huilé GH, qui sera suspendu perpendiculairement à travers la caisse dans le lieu où l'on jugera que se doivent peindre les images des objets, dont les rayons auront été rompus dans les verres lenticulaires du tuyau. Enfin ménagez au côté opposé au tuyau une ouverture en I, qui soit assez grande pour recevoir les deux yeux. La caisse doit être bien fermée de tous côtés.

Plan. 13. Fig. 13.

Quand vous voudrez voir quelques objets, vous tournerez le tuyau garni de ses Lentilles vers ces objets, & vous les ajusterez de maniere que l'image en soit peinte clairement sur le papier huilé. Ce que vous reconnoîtrez en regardant par

l'ouverture I. Pour mieux voir, il est bon de s'envelopper la tête & l'ouverture, afin qu'il n'y entre point de lumiere par cette ouverture. Les objets paroîtront représentés avec toutes leurs couleurs, de même que dans la chambre fermée qu'on a décrite dans le Problême précédent.

REMARQUES.

I.

Wolfius rapporte dans sa Dioptrique une autre construction de chambre obscure, pour redresser les images des objets qu'on voit dans une situation renversée. Si l'on veut avoir quelque chose de singulier en ce genre, il faut consulter les expériences Physiques citées ci-dessus, dans les expériences 101 & 103 de la seconde édition.

II.

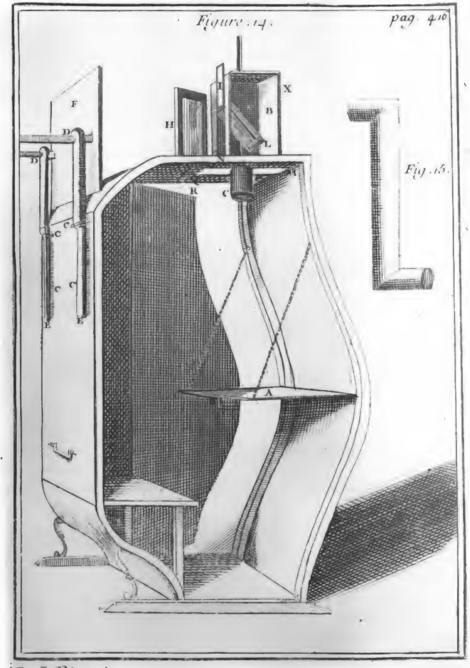
Mais on augmentera la multiplicité des objets, si on ajuste à la place du premier Verre lenticulaire un Verre à facettes, pour recevoir les rayons des objets, & qu'on mette à son foyer un autre Verre convexe dans le tuyau de la chambre obscure. Ces Verres à facettes sont une curiosité d'Optique, dont on parlera dans le Problême suivant.

III.

Voici la description d'une autre chambre obscure, inventée par G. J. s'Gravesande, qui l'a donné à la suite de son Essai de Perspective.

Cette Machine a la forme à peu près d'une Chaise à Porteur. Le dessus en est arrondi vers le derriere, & par le devant elle est faite en talus jusqu'à la moitié de sa hauteur. Voyez la Figure,

Plan. 25. Fig. 14.



Digitized by Google

Digitized by Google

re qui représente cette machine, dont le côté opposé à la porte est supposé enlevé, pour qu'on en puisse voir le dedans. Plan. 25. Fig. 14.

1. Au dedans, la planche A sert de table; elle tourne sur deux chevilles de fer qui entrent dans les bois qui forment le devant de la machine. Cette table est soutenue par deux chaînettes; de sorte qu'on peut la soulever pour entrer plus commodément par la porte qui est de côté.

2. De part & d'autre, il y a vers le derriere de la machine un tuyau de fer blanc recourbé vers les deux bouts, comme on le voit dans la Figure 15. Ce tuyau se place dans la garniture qui est au dedans, & il a une de ses extrêmités, qui donne dans la machine, & une qui aboutit au-dehors: il sert à donner de l'air, sans que la lumiere y puisse passer. On peut avoir plusieurs de ces tuyaux, & les ajuster à la chaise, si on en a besoin pour donner plus d'air. Fig. 15.

3. Au derriere de la machine en dehors sont attachés quatre petits fers c, c, c, c, dans lesquels glissent deux regles de bois DE, DE, lesquelles sont de la largeur d'environ trois pouces. Au travers de ces deux regles passent vers DD deux lattes qui tiennent attachées une planche F, laquelle par leur moyen on peut faire avancer & reculer. Fig. 14.

4. Au-dessus de la machine il y a une planche longue d'environ quinze pouces, & large de neuf, dans laquelle il y a une échancrure PMOQ, longue de neuf ou dix pouces, & large de quatre.

5. On attache sur cette planche deux regles faites en forme de queue d'aronde, entre lesquelles on fait glisser une autre planche de même longueur que la premiere, & large d'environ six pouces.

Plan. 25. Fig. 14. Cette seconde planche est percée par le milieu; & dans cette ouverture qui doit avoir trois pouces de diamétre, on fait une écroue, qui sert à élever & à abbaisser un cilindre, sur lequel il y a une vis, & dont la hauteur est d'environ quatre pouces. C'est dans ce cilindre, comme on le verra dans la suite, qu'est placé le verre convexe.

6. On fait glisser au-dessus de la planche dont on a parlé N. 4, une boëte X, en forme de petite tour quarrée, large d'environ sept ou huit pouces, & haute de dix; le côté B, qui lui sert de porte, est tourné vers le devant de la machine. Le derriere de cette boëte a vers le bas une ouverture quarrée N, d'environ quatre pouces, laquelle peut se fermer par une petite planche I, qui glisse entre deux regles.

7. Au dessus de cette ouverture quarrée il y a une fente parallele à l'horison, & qui tient toute la largeur de la boëte: par cette fente on fait entrer dans la boëte un petit miroir, qui des deux côtés glisse entre deux regles placées de telle maniere, que la glace du miroir, qui est tournée vers la porte B, fait avec l'horison un angle de cent douze degrés & demi.

8. Ce miroir, sur le milieu du côté qui reste hors de la boëte, a une petite platine de fer qui tient lieu de base à une petite vis, laquelle avance & sert à arrêter le miroir dans l'endroit où on le voit en H. Pour le fixer ainsi, on fait passer la vis dans un petit trou qu'on fait dans la planche dont il est parlé N. 5. & par une fente qu'on fait pour cet effet dans la planche qui est au-dessous de celle-là, & dont on a parlé N. 4. Ce miroir se tourne verticalement de tous côtés, & on l'arrête par le moyen d'une écroue R. Quand on ôte le miroir

de cette ſituation, la fente dont on vient de parler, ſe ferme par une petite planche, qui au-dedans de la machine gliſſe entre deux petites regles. Quant à la fente dont il eſt parlé N. 7, elle ſe ferme en partie par la planche I, quand on ouvre l'ouverture N, & les deux bouts, qui reſtent ouverts, ſe ferment par de petites regles.

9. A un des côtés de la boëte, on fait gliſſer une regle dans deux petits fers, pareils à ceux qui ſont au derriere de la machine N. 3. Cette regle paſſe de quelques pouces le derriere de la boëte; & à ſon extrémité elle a un trou par où l'on fait paſſer la vis du miroir dont je viens de parler; de ſorte qu'on peut incliner ce miroir ſous toutes ſortes d'angles au-devant de l'ouverture N.

10. Outre ce premier miroir, il y en a un autre marqué L, qui eſt plus petit: il eſt attaché vers ſon milieu à une latte, qui paſſe par le milieu du haut de la boëte. Cette latte peut s'arrêter à vis, & elle ſert à élever & à abbaiſſer le miroir qui lui eſt attaché, de maniere à pouvoir être fixé à toutes ſortes d'inclinaiſons.

REMARQUE.

Ceux qui croiront que les tuyaux dont il eſt parlé N. 2, ne ſuffiſent point pour donner de l'air à la machine, pourront mettre ſous le ſiége un petit ſoufflet, qu'on fera agir par le moyen du pied. De cette maniere on renouvellera continuellement l'air de la machine, le ſoufflet chaſſant celui qui y eſt, & obligeant ainſi celui de dehors d'entrer par les tuyaux.

Usage de la Machine qu'on vient de décrire.

I.

Représenter les objets dans leur situation naturelle.

Plan. 25. Fig. 14.

QUand on veut représenter les objets dans cette machine on étend un papier sur la table ; ou bien, ce qui est mieux, on étend le papier sur une autre planche, en sorte qu'il déborde, & on insere cette planche ainsi couverte dans un quadre ; de maniere qu'elle soit fixée par le moyen de deux regles faites en forme de queue d'aronde.

On met dans le cilindre C, qui tourne à vis dans le haut de la machine, un verre convexe, dont le foyer est à une distance à peu près égale à la hauteur de la Machine au-dessus de la table : on ouvre par derriere la boëte qui est au-dessus de la machine, & on incline vers cette ouverture le miroir L ; en sorte qu'il fasse avec l'horison un angle demi-droit, quand on veut représenter les objets pour le tableau perpendiculaire. Alors si on ôte le miroir H, & la planche F, aussi bien que les regles DE, DE, on verra se placer sur le papier tous les objets, qui envoyent sur le miroir L des rayons, qui peuvent être reflêchis sur le verre convexe, lequel on éleve, ou l'on abbaisse par le moyen de la vis du cilindre, jusqu'à ce que les objets paroissent entierement distincts.

Quand on veut représenter ces mêmes objets pour le tableau incliné, on doit donner au miroir la moitié de l'inclinaison qu'on veut donner au tableau.

Pour le tableau parallele, il faut fermer l'ouver-

Digitized by Google

ture N, & ouvrir la porte B: après quoi il faut élever le miroir L jusqu'au haut de la boëte, en le mettant dans une situation parallele à l'horison. Cette disposition de la machine peut servir, quand on est sur un balcon, ou quelque étage élevé à dessiner un Parterre qui seroit au bas.

Si on vouloit dessiner une Statue, qui seroit dans un lieu un peu élevé, & qu'on voulut la représenter de la maniere qu'il faudroit la peindre, contre un platfond il faudroit tourner le derriere de la machine vers la Statue, & tourner aussi la boëte, en sorte que la porte B regardât la Statue. Alors après avoir ouvert la porte, il faudroit mettre le miroir L verticalement, la glace tournée vers la Statue, & avancer ou reculer la boëte, ou bien élever ou abbaisser le miroir, jusques à ce que les rayons qui viennent de la Statue sur le miroir, puissent être refléchis sur le verre. Quand ces changemens de la boëte ou du miroir ne suffisent pas pour donner cette refléxion sur le verre, il faut avancer ou reculer la machine entiere.

I I.

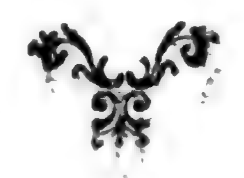
Représenter les objets, en faisant paroître à droite ce qui doit être à gauche.

AYant mis la boëte X dans la situation qu'on voit la Figure, il faut ouvrir la porte B, & fermer l'ouverture N, puis mettant le miroir H, dans la disposition qui a été dite N. 7, élevez le miroir L vers le haut de la boëte, & inclinez-le vers le premier miroir, en sorte qu'il fasse avec l'horison un angle de 22 degrés & demi, c'est-à-dire, que le dessus de la machine, après une double refléxion, paroisse vertical dans le premier miroir,

Plan. 25. Fig. 14. Pour le tableau incliné, il faut que le miroir L fasse avec l'horison un angle égal à la moitié de l'angle de l'inclinaison du tableau, moins le quart d'un angle droit. On trouve cet angle avec assez de précision pour la pratique, en inclinant le Miroir L jusques à ce que l'apparence du dessus de la machine, après une double reflexion, paroisse dans l'autre miroir sous un angle avec l'horison, égal à l'inclinaison qu'on veut donner au tableau. Si l'inclinaison du tableau étoit moindre que du quart de 90 degrés, il ne faudroit pas incliner le miroir L vers le premier, comme il vient d'être dit ci-dessus, mais du côté opposé, en faisant l'angle de l'inclinaison du miroir égal à la différence de l'angle de l'inclinaison du tableau, au quart de 90 dégrés.

Quand on veut représenter les objets pour le tableau parallele, il faut mettre le miroir L dans la disposition qui a été dite, article I. de l'usage. Et le miroir H dans celle qui a été dite au N. 9. en l'inclinant vers l'horison, sous un angle demi-droit la glace tournée vers la terre, quand on suppose le tableau au-dessous de lœil, & vers le Ciel, quand on le suppose au-dessus.

Cette disposition de la machine peut aussi être d'usage pour les tableaux inclinés, qui font avec l'horison un angle fort petit: mais alors il faut diminuer l'inclinaison d'un des miroirs, de la moitié de l'inclinaison du tableau.



Digitized by Google

III.

Plan. 25. Fig. 14.

Repréſenter tour à tour les objets qui ſont aux environs d'une campagne ou d'un jardin, au milieu duquel on a placé la machine, & faire paroître ces objets redreſſés devant celui qui eſt aſſis dans la Machine.

IL faut tourner le dos de la machine vers le Soleil, parce que les objets, qui ſont derriere la Machine, ſe repréſentant par une ſeule refléxion, leur apparence ſera toujours plus claire, bien qu'ils ſoient dans l'ombre, que celle des objets placés aux autres côtés, & qui ne peuvent être vûs que par une double refléxion.

Les objets, qui ſont aux deux côtés de la machine, ſe repréſentent par le moyen du miroir H, ſitué comme on le voit dans la Figure N. & 8. On couvre ce miroir d'une tour ou boete de carton, ouverte du côté des objets, comme auſſi du côté de l'ouverture N de la boëte X: on doit uſer de cette précaution; car ſi on laiſſe le miroir entierement expoſé, il refléchira ſur le miroir L les rayons de lumiere qui viennent de côté, leſquels entrant par le verre convexe, après avoir été refléchis par le miroir L, affoibliront extrêmement la repréſentation.

Les objets qui ſont au-devant de la machine, ſe repréſentent comme il a été dit au commencement de l'Article II.

IV.

Repréſenter des Tableaux ou des Tailles-douces.

LEs Tableaux & les Tailles-douces qu'on veut repréſenter, s'attachent contre la planche F, du côté qui regarde le derriere de la machine,

Digitized by Google

Plan. 25. Fig. 24. que l'on tourne, en sorte que ces Tailles-douces soient exposées au Soleil. Dans cette situation on les représente comme les autres objets (Art. I.) avec cette seule différence, qu'il faut changer le verre convexe, qui est dans le cilindre C : car si on se propose de donner aux Tailles-douces leur véritable grandeur, il faut que la distance du foyer à ce verre soit égale à la moitié de la hauteur de la machine au-dessus de la table, c'est-à-dire, à la moitié de AC. Si on vouloit, dans le dessein donner à ces mêmes figures plus de grandeurs qu'elles n'en ont véritablement, il faudroit que la distance du foyer à son verre fût encore plus petite; & il faudroit au contraire qu'elle fût plus grande, si on vouloit représenter les figures plus petites qu'elles ne sont. L'éloignement dans lequel il faut mettre les Tailles-douces, se trouve en avançant ou en reculant la planche F, jusqu'à ce qu'elles paroissent distinctement dans la machine. On peut déterminer cet éloignement par la proposition suivante.

La hauteur de la machine au dessus de la table ; moins la distance du foyer au verre est à
La hauteur de la machine au-dessus de la table,
comme *La distance du foyer au verre*, est à
La distance du verre à la figure.

Remarquez que cette distance du verre à la figure, se mesure par un rayon reflêchi, qui part de la figure parallement à l'horison, & qui est reflêchi par le miroir perpendiculairement sur le verre. Remarquez encore que quand on veut éloigner les figures au-delà du derriere la machine, il faut les attacher contre le côté F de la planche, & la tourner en faisant passer ses lattes par les regles

DE, DE, de maniere que la face F regarde l'ouverture N.

REMARQUE I.

Sur la représentation des Visages.

Il seroit assurément très-curieux & très-utile de pouvoir dessiner les visages des hommes au naturel. La chose réussit fort bien en petit, quand même l'apparence de la personne entiere n'occuperoit pas un demi-pouce sur le papier. Mais il y a plus de difficulté à réussir en grand.

REMARQUE II.

Sur l'ouverture du verre convexe.

Dans tout ce qui vient d'être dit, il ne faut pas négliger d'examiner l'ouverture qu'on doit donner au verre convexe; car bien qu'on ne puisse pas réduire cette ouverture à une mesure fixe, il sera bon toujours de faire attention aux remarques suivantes. 1. Qu'on peut ordinairement donner au verre la même ouverture qu'on donneroit à une lunette d'approche, dont ce verre seroit l'objectif. 2. Qu'il faut diminuer cette ouverture, quand les objets sont fort éclairés; qu'il la faut augmenter, quand au contraire ils sont exposés à un jour plus foible. 3. Que les trais paroissent mieux marquées avec une petite ouverture qu'avec une plus grande; & qu'ainsi lorsqu'on veut dessiner, il faut donner au verre le moins d'ouverture qu'il sera possible; avec cette précaution pourtant, qu'il ne faut pas trop exténuer la lumiere qui entre par-là dans la machine.

On voit par toutes ces remarques, qu'il est bon d'avoir plusieurs pieces de fer blanc, ou de

Plan. 25. Fig. 14. cuivre mince, qui ſoient rondes, de la grandeur du verre, & percées différemment, afin de pouvoir ainſi donner au verre l'ouverture dont on a beſoin. On pourroit encore faire différentes ouvertures dans une lame de cuivre, qu'on feroit gliſſer ſur le verre, ou ſe ſervir d'une plaque ronde, qui tournant ſur ſon centre, feroit paſſer ſur le verre des trous de différentes grandeurs.

REMARQUE III.

On trouvera, dans l'Eſſai de Perſpective, qu'on a cité, les Démonſtrations de tous ces Uſages, & la Deſcription d'une autre machine, qui a des avantages particuliers, mais qui cependant n'eſt point préférable à celle qu'on a décrite ici.

PROBLEME XXXV.

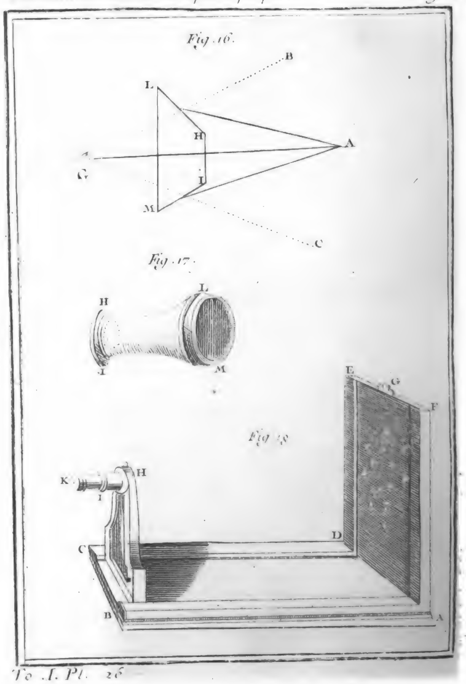
Des verres à facettes.

Plan. 26. Fig. 16. LEs verres à facettes ſont des verres taillés à pluſieurs faces, tels que le verre LHIM, dont on n'a repréſenté ici que trois faces LH, HI, IM. Ces verres repréſentent autant de fois le même objet qu'ils ont de facettes; enſorte que ſi un verre a 41 facettes, & qu'on regarde un ſoldat armé, en mettant l'œil dans le point où les rayons de l'objet, qui ſe ſont briſés en paſſant dans les 41 faces, ſe croiſent, on voit une compagnie de 41 ſoldats, quoiqu'il n'y en ait qu'un.

C'eſt ce qu'on peut remarquer en jettant les yeux ſur la figure qui repréſente la coupe de trois faces. L'objet A envoye ſes rayons ſur les trois faces LH, IH, IM. Ces faces ſont tellement taillées, que ces rayons s'étant rompus en paſſant

Digitized by Google

Digitized by Google



To. I. Pl. 26.

Digitized by Google

par le verre, ils vont se croiser au point G, ou l'œil étant placé, il appercevra l'objet A en A, en B & en C, par les trois rayons directs GA, GB, GC: car on a coutume de rapporter dans la ligne droite, qui vient en dernier lieu frapper l'organe de la vûe, les objets apperçûs, quoique les rayons qui passent de ces objets ayent souffert plusieurs détours, comme on le voit assez par les miroirs plans.

On peut enchasser un de ces verres à facettes à l'extrêmité d'un tuyau, & placer à l'autre extrêmité une lentille dans l'endroit où tous les rayons du verre à facettes se croisent, & que j'ai appellé son foyer. On a représenté un de ces verres ainsi enchassé dans la Figure HLIM. Plan. 26. Fig. 17.

REMARQUES.

Si on présente un verre à facettes aux rayons du Soleil, & qu'on le mette à la seule ouverture qu'on aura laissé dans une chambre bien fermée, on verra représenter sur un papier blanc, mis à une distance convenable, autant d'images du Soleil qu'il y aura de facettes au verre: & ces images seront d'autant plus vives, que la chambre sera plus obscure.

Mais on verra quelque chose d'agréable, si après avoir mis à l'ouverture de la chambre obscure un prisme triangulaire, on fait passer par un grand verre à facettes les differentes couleurs des rayons du Soleil, produites par le prisme, & qu'on les reçoive sur un papier blanc. On variera encore ces couleurs en leur présentant des verres lenticulaires, & en les faisant ensuite passer par un verre à facettes. On remarquera sans aucune confusion

Digitized by Google

dans le foyer du verre à facettes, les couleurs les plus belles & les plus brillantes qu'on puisse voir.

PROBLEME XXXVI.

Construire un Tableau Magique.

Plan. 26. Fig. 18. C'Est avec un verre à facettes qu'on fait voir une Figure très-bien faite, quoiqu'elle soit tout-à-fait difforme sur le Tableau où elle est peinte. Pour construire ces sortes de Tableaux, qu'on appelle *Magiques*, on élevera à plomb sur une table ABCD une autre table ou planche ADEF: on fera sur ces deux tables des rainures, suivant leur longueur; les rainures AB, & CD de la table horisontale serviront à éloigner ou avancer le pied BCH, & les rainures AF, DE de la planche verticale, serviront à hausser ou baisser un carton sur lequel on colera un papier blanc. On ajustera au haut du pied BCH un tuyau KI dans un autre HI, le tuyau KI contiendra un verre à facettes, placé en I, & un carton en K, auquel on aura fait un petit trou vers le foyer du verre à facettes.

Cela étant ainsi disposé, on placera le pied BHC sur la table horisontale, dans un lieu convenable, & on l'éloignera plus ou moins de la planche verticale, selon qu'on voudra que les parties de la Figure à dessiner sur le papier blanc du Tambour, & qu'on veut rassembler par le verre à facettes, soient plus ou moins éloignées les unes des autres. Au petit trou K on placera une lampe (ce ne doit point être une chandelle) qui renvoyera de la lumiere sur le papier blanc appliqué à la planche verticale ADEF, & l'on marquera avec du crayon le contour de ces surfaces lumineuses.

Digitized by Google

Quand on aura examiné, en regardant par le trou K, si ces surfaces lumineuses paroissent faire une même superficie, on prendra dans chacune de ces superficies les parties d'un objet qui doivent se réunir toutes quand on les regardera par le verre à facettes, placé dans le tuyau KI. Et sur les espaces qui sont entre ces surfaces, on mettra telles Figures grotesques qu'il plaira, pour faire paroître le Tableau d'autant plus difforme. On peut aussi prendre dans ces espaces des Figures qui composeront une même Figure, en les considerant à la vûe, avec celles qui seront représentées sur les surfaces lumineuses.

Ainsi lorsqu'on regardera par le trou K, on ne remarquera qu'une seule figure ou image composée de toutes les parties qui sont peintes sur les surfaces lumineuses, & l'on n'appercevra en aucune façon celles qui sont peintes dans les espaces qui sont au milieu. Voyez Wolfius dans sa Dioptrique, & Niceron dans sa perspective curieuse.

PROBLEME XXXVII.

De la Lanterne Magique.

LA Lanterne Magique est une sorte de Lanterne qui contient une lampe mise au foyer d'un verre convexe, ou d'un miroir concave, à laquelle on applique de petites figures peintes sur des verres renfermés dans un chassis de bois, qu'on fait passer devant la lampe. Ces figures se représentent d'une grandeur énorme sur une muraille ou un drap blanc, exposé à une certaine distance dans une chambre entierement obscure. Plan. 27. Fig. 19.

On ne s'étendra pas ici davantage sur la descrip-

Digitized by Google

tion, ni sur les effets de la Lanterne Magique; parce qu'on aura occasion d'en parler dans les Problêmes de Physique.

PROBLEME XXXVIII.

De Lunettes d'approche ou Telescopes.

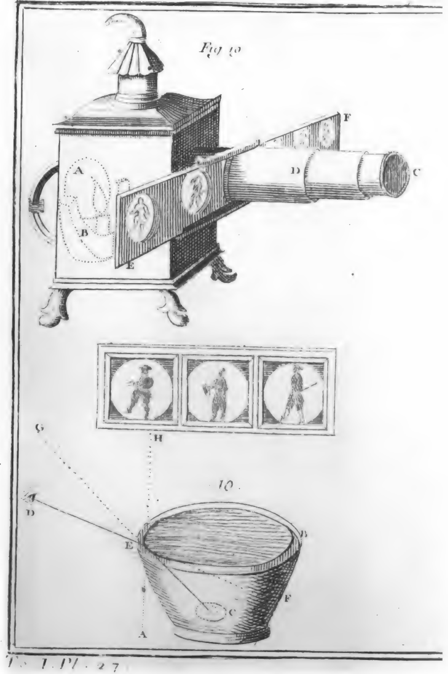
ENtre les differentes machines d'Optique, les Lunettes d'approche sont celles qui sont d'un plus grand usage. Elles sont composées des verres dont on a parlé dans le Problême XXX & suivans, & servent à faire paroître près les objets éloignés. Il y a plusieurs sortes de Lunettes d'approche, 1°. à deux verres, dont l'un est convexe & l'autre concave, qui représentent les objets droits, comme on les voit naturellement. 2°. à deux verres convexes, qui représentent les objets renversés. 3°. à quatre verres convexes, qui redressent les objets qui paroissent renversés, en les regardant avec deux verres convexes.

REMARQUES.

I.

Il est aisé de faire une Lunette d'approche de la premiere sorte, qu'on appelle *Lunette d'Hollande* ou *de Galilée*. On prend un verre plan d'un côté, & convexe de l'autre, ou convexe des deux côtés, pourvû que la convexité soit faite avec une portion de grande Sphere : on ajuste ce verre, qu'on nomme *objectif*, à l'extrêmité d'un tuyau de carton ou d'autre matiere, selon qu'on le trouvera meilleur : on emboëte dans ce tuyau un autre tuyau de même matiere; de sorte que celui-ci puisse

Digitized by Google



Digitized by Google

Digitized by Google

rentrer dans le premier : on ajuste encore à l'extrêmité de ce second tuyau un autre verre concave des deux côtés. Enfin on place ce verre concave en coulant le tuyau dans lequel il est enchassé, de maniere qu'on puisse voir distinctement les objets qu'on veut regarder. La concavité de ce verre qu'on nomme *Oculaire*, doit être faite avec la portion d'une petite Sphere. Le verre concave sera placé entre le verre convexe & son foyer. Si un verre concave ne faisoit point paroître les objets assez clairement, on en chercheroit un autre jusqu'à ce qu'on en ait trouvé un qui les fit voir distinctement.

II.

Quand on a trouvé le point où l'on voit distinctement les objets assez éloignés, on fait une marque au tour du second tuyau avec de l'encre, à l'endroit où finit le premier, afin de le remettre au même endroit, lorsqu'on veut voir les mêmes objets. Mais il est à remarquer que cet endroit ne conviendra pas à toutes sortes de personnes pour voir le même objet, ni à la même personne pour regarder des objets inégalement éloignés. Il faut que chacun ajuste le second tuyau, qui contient l'oculaire, à la portée de sa vûe.

III.

On aura une Lunettre d'approche fort claire & fort commode d'un pied huit pouces de longueur ou environ, si on se sert d'un objectif convexe des deux côtés, qui ait quatre pieds de diamétre, & d'un oculaire concave des deux côtés, qui ait quatre pieds & demi de diamétre. Mais on fera un très-bon Telescope avec un oculaire concave des deux côtés, dont le diametre soit de cinq pouces

& demi, & un objectif convexe des deux côtés; ou d'un côté feulement, & plan de l'autre, dont le diamétre foit de douze pieds. Ce Telefcope fera excellent pour obferver les Aftres.

IV.

Les lunettes à deux verres convexes fe feront de la même maniere; mais l'oculaire fera placé au deffous du foyer de l'objectif. Comme les objets paroiffent renverfés, on pourra corriger ce défaut en plaçant un miroir au-deffus du foyer de l'oculaire, à peu près à l'endroit où l'on doit placer l'œil. Ce Miroir fera de métal bien poli, d'un pouce en ovale, & faifant un angle demi-droit avec l'axe des verres: il faudra en approcher l'œil affez près pour voir diftinctement les objets qui paroîtront dans leur fituation naturelle. Quand on obferve les Aftres, il n'eft pas néceffaire d'y ajouter un Miroir, il importe peu en quelle fituation ils paroiffent: d'ailleurs on s'accoutume bien-tôt à diftinguer leur partie orientale d'avec l'occidentale.

III.

On obfervera que dans ces fortes de Lunettes, le diamétre de l'objectif doit être grand par rapport à celui de l'oculaire: car, par exemple, une Lunette dont l'objectif eft de vingt-cinq pieds, portera un oculaire de trois pouces, & celle dont l'objectif fera de cinquante pieds, portera un oculaire, qui n'aura que quatre pouces & demi de diamétre. On peut faire une Lunette d'une grandeur commode, avec un objectif de deux pieds trois pouces, & un oculaire d'un pouce & demi.

VI.

Il y a une différence à faire entre les objectifs convexes

Digitized by Google

convexes des deux côtés, & les objectifs convexes plans. Les objectifs convexes des deux côtés d'une même convexité ont leur foyer au centre de l'une des convexités, & les objectifs convexes plans ont leur foyer à l'extrêmité du diametre de la convexité. On mesure la longueur de ces Lunettes par l'éloignement du foyer de leur objectif. Ainsi on dit qu'une Lunette a douze pieds, si le demi-diametre de l'objectif convexe des deux côtés est de douze pieds, ou bien si le diametre de l'objectif plan-convexe est de douze pieds.

VII.

Si l'on ajoute à la Lunette, qu'on vient de décrire, deux Lentilles semblables à l'oculaire, on aura une Lunette d'approche qui fera paroître les objets dans leur situation ordinaire, & qui sera meilleure que la Lunette appellée communément *Lunette de Galilée*. Ces deux Lentilles ajoutées se placent auprès de l'oculaire dans un tuyau séparé, qu'on peut ôter quand on veut. Ainsi une Lunette à deux verres peut devenir Lunette à quatre verres, en ajoutant le tuyau qui contient les deux oculaires; & en ôtant ce même tuyau, une Lunette à quatre verres deviendra facilement Lunette à deux verres. Si la Lunette à quatre verres a quelque avantage sur la Lunette à deux verres, elle a aussi ce désavantage, qu'elle represente les objets moins clairement.

VIII.

Pour rendre l'objet vû par les Lunettes plus clair, on met sur l'objectif un carton percé au milieu; on fait plusieurs de ces cartons, dont les ouvertures sont de differente grandeur: on essaye

celui avec lequel on voit l'objet plus distinctement. Ce carton doit avoir son diametre égal à la largeur de l'objectif; il faut aussi le noircir, aussi-bien que le dedans des tuyaux, pour empêcher les rayons de lumiere de se réflechir.

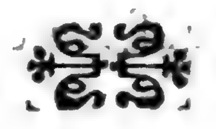
IX.

On frottera le dedans des tuyaux d'un noir huilé, puis on y mettra du charbon broyé, & on les secouera; enfin on les laissera sécher. On peut encore noircir ces tuyaux de Lunettes avec la fumée d'une bougie de poix résine.

Des Microscopes.

Les Lunettes d'approche nous font voir les objets, que nous n'appercevons à la vûe que confusément, à cause de leur éloignement; les Microscopes nous font voir distinctement les parties des corps que leur petitesse nous rend insensibles. On distingue en général deux sortes de Microscopes; le simple, qui est fait avec une seule Lentille, & le composé, qui est fait de plusieurs Lentilles. Les Microscopes n'ont été connus que dans le siecle dernier vers l'an 1620.

On ne donnera ici la description que de quelques Microscopes simples, qu'on peut faire soi-même pour se divertir: la dépense n'en sera pas grande. Si on veut avoir d'autres Microscopes, soit simples, soit composés, on consultera les Auteurs qui en ont traité, comme Wolfius, Jobelot, & autres.



PROBLEME XXXIX.

Faire une Lentille pour un Microscope simple.

IL faut prendre un morceau de glace de Miroir ou de carosse & le réduire en très-petits morceaux avec un gressoir de Vitrier; au défaut de cet instrument on se servira des dents d'une clef. On choisira entre ces petits morceaux ceux qui seront les plus petits & les plus plats : on en prendra un avec la pointe d'une grosse aiguille, qui doit être assez longue. On mettra ce petit morceau de glace dans la flamme d'une bougie, où il se fondra en peu de tems; lorsqu'il sera fondu, il tombera de lui-même.

REMARQUES.

On mouillera la pointe de l'aiguille avec de la salive, pour y coller le petit morceau de glace, s'il ne s'y attache point autrement : on panchera un peu la bougie, afin que la Lentille ne tombe point dans la cire, & pour la recevoir, il faut mettre au-dessous un morceau de papier, dont les bords soient relevés; car s'ils ne l'étoient pas, les petites goutes en tombant sauteroient & se perdroient : si ces petites goutes n'étoient pas assez rondes, on les reprendroit, & on les feroit refondre pour les arondir davantage. On prend une aiguille assez longue, afin de ne se point brûler, quand on la met dans la flamme de la bougie. On préférera la flamme bleue de la bougie, ou la flamme de l'esprit de vin à la flamme de la bougie.

PROBLEME XL.

Faire un Microſcope avec la Lentille dont on vient de donner la conſtruction.

PRenez une petite plaque de plomb, que vous rendrez plus ou moins mince, à proportion de la petiteſſe de la Lentille. Faites-y avec la pointe de l'aiguille un trou propre à recevoir la Lentille que vous voulez y appliquer ; vous l'y arrêterez avec les bords du trou que vous releverez.

Uſage de ce Microſcope.

Ayant laiſſé tremper pendant deux ou trois jours de l'écorce de chêne, des feuilles d'herbes ou de fleurs ſéches, ou autres choſes dans de l'eau, on en prendra une goute avec un petit bâton ; on appliquera cette goute d'eau ſur la ſurface d'un côté de la Lentille : on approchera le plus près qu'on pourra de l'œil l'autre côté de la Lentille ; & en regardant à la lumiere d'une bougie, on verra une infinité de petits animaux, qui ſont dans un mouvement continuel.

On peut appliquer ſur l'une des ſurfaces de la Lentille, un cheveu, ou autre choſe, qu'on y attachera avec un peu de cire des deux côtés de la Lentille.

PROBLEME XLI.

Faire un Microſcope avec une goute d'eau

AU lieu de la Lentille, on mettra une goute de l'infuſion dans le trou de la plaque de plomb, dont on vient de parler dans le Problême

Digitized by Google

précédent ; on regardera à travers cette goute d'infusion à la lumiere d'une bougie, & l'on y appercevra les petits animaux, qui ne cessent de se mouvoir, jusqu'à ce que la goute soit dessechée, ou qu'elle ait perdu la figure sphérique.

On peut ajuster ce Microscope à l'extrêmité d'un tuyau de carton, afin que la lumiere du grand jour n'empêche point celle de la bougie. Il sera aisé à chacun de faire des réflexions sur ce qu'on vient de dire, pour rendre ces Microscopes plus complets, ou pour en inventer d'autres.

Remarques sur les Microscopes simples.

Les Microscopes simples augmentent le diametre de l'objet qu'on regarde, en raison de la distance du foyer à huit doigts, qui est la distance où l'on peut voir distinctement un petit objet, comme seroient les lettres d'une écriture assez menue. Ainsi si la distance du foyer d'un Microscope à ce Microscope est d'un demi-doigt, le diametre de l'objet posé dans le foyer sera augmenté de seize fois, c'est-à-dire, que ce diametre paroîtra seize fois plus grand. Plus la distance du foyer sera petite, plus le diametre de l'objet sera augmenté. D'où il suit que les Microscopes simples seront d'autant meilleurs, qu'ils seront faits des Spheres plus petites.

En comparant une goute d'eau avec une goute de glace, dont on a fait les Microscopes dans les Problêmes précédens, on trouve que la goute de glace augmente plus le diametre de l'objet, que la goute d'eau : car supposant que ces deux goutes ayent chacune $\frac{1}{10}$ de doigt pour leurs diametres, le diametre d'un même objet paroîtra aug-

menté d'environ 103 fois en le regardant à travers la goute de glace, au lieu qu'il ne paroîtra augmenté que d'environ 80 fois en le regardant à travers la goute d'eau.

La Géometrie nous apprend que la superficie d'un quarré ou d'un cercle est en raison doublée du côté du quarré ou du diametre du cercle, & que le corps cubique ou sphérique est en raison triplée du côté du cube ou du diametre de la Sphere. Ainsi la superficie d'un corps, dont le diametre sera augmenté de 100 fois, paroîtra 10000 fois plus grande, & le corps même paroîtra 1000000 fois plus grand, que s'il étoit vû sans Microscope. Ce qui est une augmentation très-considerable.

C'est avec cette sorte de Microscope qu'on remarque que la poussiere, qui est sur les papillons, est semblable à des plumes; que celle, qui est sur l'étamine des fleurs, paroît être une multitude de petites boules; que l'eau, qui se trouve dans les moules, contient un grand nombre de petites moules; que la semence des animaux contient une grande quantité de petits animaux qui s'y remuent en tout sens; que les cheveux sont ronds & creux. Enfin on peut observer la figure des parties du sang, du lait, &c.

Observations sur les Microscopes composés.

Les Microscopes composés ont des avantages très-considerables. Les grains de sable fort menus paroissent comme de petits cristaux; les parties du corps d'une mouche s'y voyent très-distinctement; les particules d'acier qui tombent du fusil quand on le bat pour allumer du feu, paroissent rondes

Digitized by Google

& semblables au plomb des Chasseurs. On remarque très-distinctement la circulation du sang, principalement dans la queue d'un Poisson appellé *Tanche*, &c. Voyez Poliniere dans ses Experiences Physiques, p. 501 de la seconde édition.

De la Perspective curieuse.

PROBLEME XLII.

Décrire sur un plan une figure difforme, qui paroisse au naturel, étant regardée d'un point déterminé.

On peut déguiser, c'est-à-dire, rendre difforme une figure, par exemple, une tête, en sorte qu'elle n'aura aucune proportion étant regardée de front sur le plan où on l'aura tracée; mais étant vûe d'un certain point, elle paroîtra belle, c'est-à-dire, dans ses justes proportions. Cela se pratiquera de la sorte.

Ayant dessiné sur du papier la figure que vous voulez déguiser avec ses justes mesures, décrivez un quarré autour de cette figure, comme ABCD, & réduisez-le en plusieurs autres petits quarrés, divisant les côtés en plusieurs parties égales, par exemple, en sept, & tirant des lignes droites en long & en travers par les points opposés des divisions, comme font les Peintres, quand ils veulent contre-tirer un tableau, & le réduire au petit pied, c'est-à-dire, de grand en petit. Plan. 28. Fig. 80.

Cette préparation étant faite, décrivez à discretion sur le plan proposé le quarré long EBFG; & divisez l'un des deux plus petits côtés EG, BF, comme EG, en autant de parties égales qu'en contient DC, l'un des côtés du quarré ABCD; comme ici en sept. Divisez l'autre côté BF en deux également au point H, duquel vous tirerez

Digitized by Google

par les points de division du côté opposé EG autant de lignes droites, dont les deux dernieres seront EH, GH.

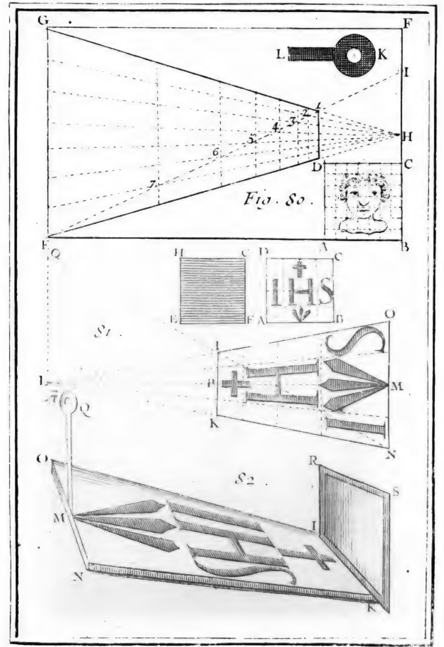
Après cela ayant pris à discretion sur le côté BF le point I, au-dessus du point H, pour la hauteur de l'œil au-dessus du plan du tableau, tirez de ce point I au point E, la ligne droite EI, qui coupe ici celles qui partent du point H, aux points 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Par ces points d'intersection vous tirerez des lignes droites paralleles entr'elles, & à la base EG du Triangle EHG, qui se trouvera ainsi divisé en autant de trapezes qu'il y a de quarrés dans le quarré ABCD. C'est pourquoi si l'on rapporte dans ce Triangle EGH, la figure qui est dans le quarré ABCD, en faisant passer chaque trait par les mêmes trapezes ou quarrés perspectifs, qui sont représentés par les quarrés naturels du grand ABCD, la figure difforme se trouvera décrite. On la verra conforme à son prototype, c'est-à-dire, comme dans le quarré ABCD, en la regardant par un trou qui doit être petit du côté de l'œil, & bien évasé du côté de la figure, comme K, que je suppose perpendiculairement élevé sur le point H, en sorte que sa hauteur LK soit égale à la hauteur HI, qui ne doit pas être bien grande, afin que la figure soit plus difforme dans le tableau. Voyez le Probl. XLIV.

PROBLEME XLIII.

Décrire sur un plan une figure difforme, qui paroisse dans sa perfection, étant vûe par reflexion dans un Miroir plan.

Plan. 28. Fig. 81. AYant, comme on vient de faire, compris la figure qu'on veut déguiser dans un quarré,

Digitized by Google



To. I. Pl. 28.

Digitized by Google

Digitized by Google

tel qu'eſt ABCD, diviſé en pluſieurs autres petits quarrés, qui ſont ici au nombre de ſeize ; & ſuppoſant que le Miroir eſt une glace parfaitement quarrée, toute nue & ſans quadre, comme EF-GH, tirez ſur le plan du tableau la ligne droite IK, égale au côté EF du Miroir, afin que la figure occupe entierement le Miroir EFGH. Enſuite ayant diviſé en deux également au point P cette ligne IK, menez par le point du milieu P la perpendiculaire indéfinie LM, en ſorte que les deux parties PL, PM, ſoient égales entr'elles, & d'une longueur priſe à volonté. Plan. 28. Fig. 28.

Après cela élevez au point L, la ligne LQ perpendiculaire à la ligne LM, & égale au double de la ligne IK, ou du côté du Miroir EF, & au point M, la ligne NO perpendiculaire à la même ligne LM, que vous prendrez auſſi double de la ligne IK, en ſorte que chacune des deux parties MN, MO, ſoit égale à la ligne IK. Joignez les droites LN, LO, qui paſſeront par les points I, K, & formeront le Triangle LNO, que l'on diviſera, comme au Problême précédent, en autant de quarrés perſpectifs, que le quarré ABCD en contient de naturels, pour y tranſporter de la même façon la figure du quarré ABCD, qui ſe trouvera difforme ſur le plan du tableau, & qui paroîtra belle & ſemblable à ſon prototype, étant vûe du point Q élevé perpendiculairement ſur le point L, comme nous avons dit au Problême précédent : ou bien on la verra en ſon naturel par réflexion dans le Miroir EFGH ; placé ſur la ligne IK, en regardant le Miroir par un petit trou élevé perpendiculairement ſur le point M, à la hauteur de LQ, comme vous le voyez dans la Fig. 82, où IRSK Fig. 82. repréſente le Miroir, & Q le point de l'œil, &c.

Digitized by Google

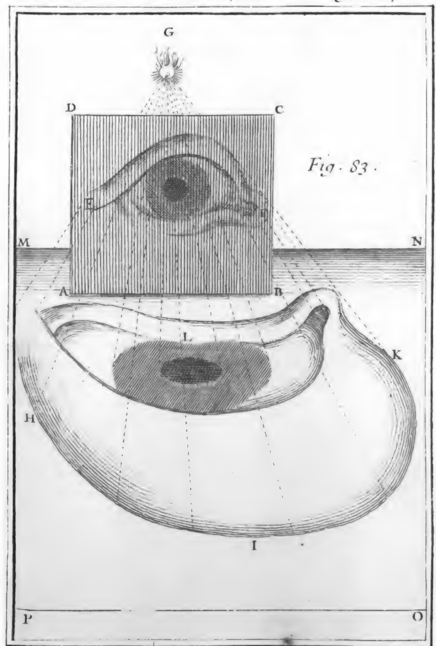
PROBLEME XLIV.

Décrire sur un plan horisontal une figure difforme, qui paroisse au naturel sur un plan vertical, transparent, posé entre l'œil & la figure difforme.

Plan. 29. Fig. 83. IL est évident que si l'on met en perspective quelque figure que ce soit sur du papier, consideré comme un plan horisontal, & que sur la ligne de terre on éleve à angles droits un plan transparent, qui soit, par exemple, de verre; l'œil étant placé vis-à-vis du point de vûe, à une hauteur égale à la distance de la ligne de terre à la ligne horisontale, & éloigné du plan transparent, qui représente le tableau d'une distance égale à celle qu'on a supposée dans la perspective, on verra dans le verre la figure difforme dans son naturel. Ceux, qui entendent la perspective, comprennent facilement ce que je viens de dire, & ceux qui ne l'entendent pas, pourront résoudre ce Problême mécaniquement en cette sorte.

Ayant décrit sur une piece de carton ABCD, la figure que vous voulez déguiser, avec ses justes proportions; par exemple, l'œil EF, picquez cette figure EF, comme si vous vouliez faire un poncis: & ayant élevé à angles droits ce carton ainsi picqué sur le plan MNOP, où vous voulez décrire la figure difforme, mettez derriere le carton ABCD, une bougie allumée à telle hauteur & à telle distance qu'il vous plaira, comme en G. Alors la lumiere passant par les trous du carton ABCD, portera la figure sur le plan MNOP, & l'y représentera toute défigurée, comme HIKL,

Digitized by Google



To. I. Pl. 29.

Digitized by Google

que l'on marquera avec un crayon, ou autrement. Cette image ainsi défigurée paroîtra en son naturel sur un verre mis à la place du carton ABCD, étant regardée par l'œil placé au point G. Elle paroîtra aussi semblable à son prototype EF, étant vûe simplement par un petit trou mis au point G; comme au Problême XLII.

PROBLEME XLV.

Décrire sur la surface convexe d'une Sphere une figure difforme, qui paroisse au naturel, étant regardée d'un point determiné.

Ayant dessiné sur du papier la figure que vous voulez déguiser avec ses justes proportions, enfermez-la dans un cercle ABCD; dont le diametre AC, ou BD, soit égal au diametre de la Sphere proposée. Divisez la circonference de ce cercle en autant de parties égales qu'il vous plaira, par exemple, en seize. Tirez du centre de ce cercle par les points de division, autant de lignes droites. Divisez aussi le diametre AC, on BD de ce cercle en un certain nombre de parties égales, comme en huit, & décrivez du même centre par les points de division des circonferences de cercle, lesquelles avec les lignes droites tirées du centre, diviseront le cercle ABCD en 64 petits espaces. Plan 30. Fig. 84.

Décrivez encore un autre cercle EFGH égal au précédent ABCD, & menez de son centre I la ligne droite IK, égale à la distance de l'œil au centre de la Sphere proposée, en sorte que la partie GK soit égale à la hauteur de l'œil sur la surface de la même Sphere. Ensuite ayant mené par le même centre I, le diametre FH perpendiculaire à

Digitized by Google

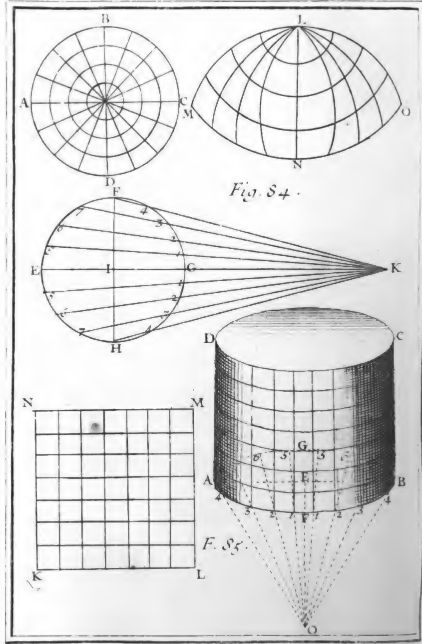
Plan. 30. Fig. 30. la ligne IK, divisez ce diametre FH en autant de parties égales, que le diametre du premier cercle ABCD, sçavoir, en huit parties égales. Puis tirez du point K, par les points de division autant de lignes droites, qui donneront sur le demi-cercle FGH, les points 1, 2, 3, 4, & sur l'autre demi-cercle FEH, les points 5, 6, 7.

Cette préparation étant faite, décrivez sur la surface convexe du globe proposé MLO du point L, comme pole, & des intervalles G1, G2, G3, G4. GF, des cercles paralleles entr'eux, dont le plus grand sera MNO, duquel on ne voit ici que la moitié, qu'il faut diviser en autant de parties égales que la moitié du cercle ABCD, comme ici en huit parties égales. Décrivez par les points de division & par le pole L, autant de grands cercles, qui avec les précédens diviseront l'hemisphere LMNO en autant de petits espaces que le cercle ABCD, dans lesquels on transportera l'image du cercle ABCD. Cette image ou figure, qui sera défigurée dans l'hemisphere LMNO, paroîtra néanmoins semblable à son prototype, qui se trouve dans le cercle ABCD, étant regardée d'un point élevé perpendiculairement sur le point L, & éloigné de ce point L d'une distance égale à la ligne GK.

REMARQUE.

Ce que nous avons fait sur la surface convexe d'une Sphere, se peut faire de la même façon sur la surface concave de la même Sphere, excepté que les cercles paralleles qui ont été décrits du pole L, avec les ouvertures G1, G2, G3, &c. doivent être décrits avec les ouvertures E5, E6, E7, EF, c'est-à-dire, qu'au lieu de se servir du demi-cercle

Digitized by Google



To. I. Pl. 30.

Digitized by Goog

FGH, que l'œil placé au point K voit par sa convexité, on doit se servir de l'autre demi-cercle FEH, que l'œil placé au même point K, voit par sa concavité.

PROBLEME XLVI.

Décrire sur la surface convexe d'un cylindre une figure difforme, qui paroisse belle quand elle sera vûe d'un point determiné.

AYant, comme à l'ordinaire, renfermé la figure qu'on veut déguiser en un quarré KLMN, divisé en plusieurs autres petits quarrés, & ayant déterminé le point de l'œil en O, à une distance raisonnable du cylindre proposé ABCD, dont la base est le cercle AFBG, tirez du centre E de cette base par le point déterminé O, la ligne droite EO; menez perpendiculairement à cette ligne EO, par le même centre E, le diametre AB, que vous diviserez en autant de parties égales, qu'en contient le côté KL du quarré KLMN. Tirez du point O, par les points de division autant de lignes droites, qui donneront sur la circonférence du demi-cercle AFB, que l'œil voit, les points 1, 2, 3, 4, & sur la circonference de l'autre demi-cercle AGB, que l'œil ne voit pas, les points 5, 6, 7. Plan. 38. Fig. 85.

Après cela tirez par les points 1, 2, 3, 4, sur la surface du cylindre des lignes paralleles entre elles, & à l'axe du même cylindre, ou au côté AD, ou BC. Puis ayant divisé une de ces paralleles en autant de parties égales qu'en contient le diametre AB, décrivez sur la surfacc du même cylindre par les points de division des circonfé-

rences de cercle paralleles à la circonference AFBG, lesquelles, avec les lignes droites paralleles précédentes, formeront de petits espaces, dans lesquels on transportera la figure du quarré KLMN. Cette image qui se trouvera défigurée sur la surface du cylindre ABCD, paroîtra néanmoins conforme à son prototype, étant regardée par un petit trou placé au point O, où l'œil a été supposé dans la construction.

REMARQUE.

Ce que nous venons de faire sur la surface convexe du cylindre ABCD, se peut faire de la même façon dans sa surface concave, en se servant du demi-cercle AGB, comme nous avons fait du demi-cercle AFB, c'est-à-dire, en élevant des perpendiculaires des points 5, 6, 7, dans la surface concave, comme nous avons fait des points 1, 2, 3, 4, dans la surface convexe, &c.

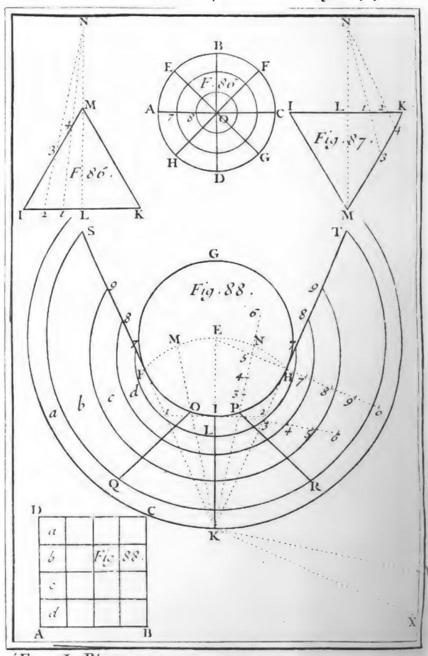
PROBLEME XLVII.

Décrire sur la surface convexe d'un cone une figure difforme, qui paroisse en son naturel, étant regardée d'un point déterminé.

Plan. 31. Fig. 86. DEcrivez autour de la figure, que vous voulez déguiser, un cercle à volonté, comme ABCD, & divisez sa circonference en autant de parties égales qu'il vous plaira, comme en huit. Tirez par les points de division A, E, B, F, &c. au centre O, autant de demi-diametres. L'un de ces demi-diametres, comme AO, étant divisé, par exemple, en trois parties égales aux points 7, 8,

Digitized by Google

Digitized by Google



Digitized by Google

vous décrirez du centre O, par ces points de division 7, 8, autant de circonferences de cercles, qui, avec les demi-diametres précédens, diviseront l'espace terminé par la premiere & plus grande circonference ABCD en 24 petits espaces, qui serviront à contre-tirer l'image qui y sera comprise, & à la défigurer sur la surface convexe du cone, quand cette surface aura été divisée en autant de semblables petits espaces, en cette sorte. Plan. 31. Fig. 86.

Ayant tiré à part la ligne IK égale au diametre de la base du cone proposé, & l'ayant divisé en deux également au point L, élevez en ce point L la perpendiculaire LM égale à la hauteur du cone. Joignez les droites MI, MK, qui représenteront les côtez de ce cone, que je suppose droit, comme si ce cone avoit été coupé par un plan tiré par son axe, de sorte que le Triangle isoscele IKM representera le Triangle de l'axe.

Cela étant fait, prolongez la perpendiculaire LM en N, autant au-dessus du point M, qui represente la pointe du cone, que vous voudrez que l'œil soit élévé au-dessus de cette pointe; en sorte que la ligne MN soit égale à la distance de l'œil au sommet du cone. Ayant divisé la moitié IL de la base IK en autant de parties égales que le demi-diametre AO du prototype, tirez du point N, par les points de division 1, 2, les droites N1, N2, qui donneront sur le côté IM les points 4, 3. Enfin décrivez de la pointe du cone & des intervalles M3, M4, des circonferences de cercle sur la convexité du cone, qui representeront les circonferences du prototype ABCD. Puis ayant divisé la circonference de la base du cone en autant de parties égales qu'en contient la circonférence ABCD, tirez de la pointe du centre par les

points de division autant de lignes droites, qui, avec les circonferences précedentes, diviseront la surface convexe du cone en 24 espaces difformes, qui representeront ceux du prototype ABCD, & dans lesquels par conséquent on transportera la figure de ce prototype, qui se trouvera difforme sur la surface du cone, & qui étant regardé de l'œil mis directement au-dessus de la pointe du cone à la distance MN, paroîtra comme une surface plane; & conforme à son prototype.

REMARQUES.

Plan. 31. Fig. 87. Ce que nous venons de faire sur la surface convexe d'un cone posé sur sa base se peut pratiquer de la même façon sur la surface concave d'un cone creux, posé sur sa pointe, excepté qu'il faut prolonger la perpendiculaire LM au-delà du point L en N; de sorte que la ligne MN soit égale à la distance de l'œil à la pointe du cone, qui dans ce cas lui doit servir de base, afin que l'œil placé en N, le puisse voir par le dedans, &c.

PROBLEME XLVIII.

Décrire sur un plan horisontal une figure difforme, qui paroisse belle sur la surface convexe d'un Miroir cylindrique droit; étant vûe par reflexion d'un point donné.

Fig. 88. IL faut premierement enfermer dans un quarré, comme ABCD, la figure qu'on veut déguiser, & diviser ce quarré ABCD en seize autres petits quarrés, qui serviront à transporter la figure du prototype sur les quarrés semblables difformes qu'on

qu'on aura décrits sur la surface placée au pied du Miroir cylindrique, dont la base est le cercle FGHI, qui a le point E pour centre. Ce qui se fera en cette sorte. Plan. 31. Fig. 88.

Si K est l'assiette de l'œil, c'est-à-dire, le point qui répond sur le plan horisontal perpendiculairement à l'œil qui peut être éloigné du cylindre d'un ou de deux pieds, & un peu plus haut que le cylindre, afin qu'il puisse voir par reflexion plus de parties du plan horisontal; tirez par ce point K & par le centre E, la droite KE. Divisez KE en deux parties égales au point L. De ce point L & pour rayon LE, décrivez l'arc de cercle FEH, qui donnera sur la circonférence FGHI, les deux points F, H. Par le point K, & par les points FH, vous tirerez les droites KFS, KHT, qui toucheront cette circonférence aux mêmes points F, H.

Après cela divisez chacun des deux arcs égaux EF, EH, en deux également aux points M, N; & tirez du point K par les points M, N, les droites KM, KN, qui donneront sur la circonférence FIH, les deux points O, P. Par ces points G, P, vous tirerez les deux lignes OQ, PR, en sorte que l'angle de reflexion FOQ soit égal à l'angle d'incidence PGK, en prenant la ligne KO pour un rayon d'incidence; & que pareillement l'angle de reflexion HPR soit égal à l'angle d'incidence OPK, en prenant la ligne KP pour un rayon d'incidence. Alors les cinq lignes IK, OQ, PR, FS, HT, représenteront les lignes du prototype, qui sont paralleles aux deux côtés AD, BC, que les deux touchantes ES, HT, représentent. Il ne reste plus qu'à diviser ces lignes en quatre parties égales en représentation; ce que je

Plan 31, Fig. 88. ferai de la maniere qui suit, pour avoir plutôt fait sans que l'erreur puisse être considérable.

Ayant mené par le point I, où la ligne KE coupe la circonférence FIH, la ligne 1, 2, perpendiculaire à la même ligne KE, qui sera terminée aux points 1, 2, par les deux touchantes KF, KH, tirez du centre E par le point H la droite Ho, que vous ferez égale à la ligne 1, 2, & divisez-la en quatre parties égales aux points 7, 8, 9. Tirez ensuite par le point K, la droite KX, que vous ferez égale à la hauteur de l'œil, & parallele à la ligne Ho, ou perpendiculaire à la touchante KH. Ayant appliqué une regle bien droite au point X, & aux points de division 7, 8, 9 o, marquez des points sur la ligne HT, dans les endroits où elle se trouvera coupée successivement par la régle. La ligne HT se trouvera divisée aux points 7, 8, 9, T, en parties égales en apparence à celles de la ligne 1, 2, qui est divisee par les lignes tirées du point K, en quatre parties qui sont presque égales entr'elles. Enfin portez les divisions de la touchante HT sur l'autre touchante FS.

Pour diviser la ligne PR en quatre parties égales en représentation à celles de la ligne 1, 2, tirez par le point P la ligne P6, que vous ferez perpendiculaire à la ligne KP, & égale à la ligne 1, 2. Divisez cette perpendiculaire P6 en quatre parties égales aux points 3, 4, 5. Tirez pareillement par le point K, la ligne KV, que vous ferez égale à la hauteur de l'œil, & parallele à la ligne P6, ou perpendiculaire à KP. Ayant comme auparavant appliqué une regle au point V, & aux points de division 3, 4, 5, 6, marquez sur la ligne KP prolongée les points 3, 4, 5, 6,

Digitized by Google

dans les endroits où elle sera coupée par la régle. Enfin portés les divisions de la ligne PN sur chacune des deux lignes PR, OQ, & faites passer par les points également éloignés de la circonférence FCHI, qui ont été marqués sur les quatre lignes FS, OQ, PR, HT, quatre circonférences de cercle, qui avec les lignes droites FS, OQ, IK, PR, HT, formeront seize quarrés difformes, dans lesquels on transportera la figure du prototype ABCD, qui se trouvera défigurée sur le plan horisontal, & qui paroîtra dans sa perfection sur la surface convexe du Miroir cylindrique, posé droit sur la base FGHI, quand elle sera vûe par refléxion de l'œil élevé perpendiculairement sur le point K à une hauteur égale à la ligne KV, ou KX. Voyez la remarque du Problême suivant. Plan. 31. Fig. 88.

PROBLEME XLIX.

Décrire sur un plan horisontal une figure difforme qui paroisse belle sur la surface convexe d'un Miroir conique élevé à angles droits sur ce plan, étant vûe par refléxion d'un point donné dans l'axe prolongé de ce Cone.

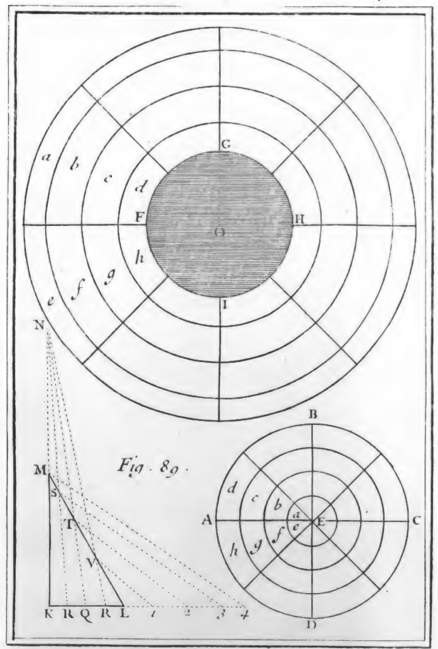
DEcriuez autour de la figure que vous voulez déguiser, le cercle ABCD d'une grandeur prise à volonté, & divisez sa circonférence en tel nombre de parties égales qu'il vous plaira. Tirez du centre E par les points de division autant de demi-diamétres, dont l'un, comme AE, ou DE, doit aussi être divisé en un certain nombre de parties égales. Décrivez du centre E par les points de division autant de circonférences de cercle, qui Plan. 32. Fig. 89.

Plan. 32. Fig. 89. avec les demi diamétres précédens, diviseront l'espace terminé par la premiere & plus grande circonférence ABCD, en plusieurs petits espaces, qui serviront à entretenir la figure qui y sera comprise, & à la défigurer sur le plan horisontal autour de la base FGHI du miroir conique en cette sorte.

Ayant pris le cercle FGHI, dont le centre est O, pour la base du cone, faites à part le triangle rectangle KLM, dont la base KL soit prise égale au demi-diamétre OG de la base du cone, & la hauteur KM égale à la hauteur du même cone. Prolongez cette hauteur KM en N, de sorte que la partie MN soit égale à la distance de l'œil à la pointe du cone, ou toute la ligne KN égale à la hauteur de l'œil au-dessus de la base du cone. Ayant divisé la base KL en autant de parties égales qu'en contient le demi-diamétre AE, ou DE, du prototype, tirez du point N, par les points de division P, Q, R, autant de lignes droites, qui donneront sur l'hypotenuse LM, qui représente le côté du cone, les points S, T, V. Faites au point V l'angle LV 1 égal à l'angle LVR, au point T l'angle LT 2 égal à l'angle LTQ, au point S l'angle LS 3 égal à l'angle LSP, & au point M, qui représente le sommet du cone, l'angle LM4 égal à l'angle LMK, pour avoir sur la base KL prolongée les points 1, 2, 3, 4.

Enfin décrivez du centre O de la base FGHI du Miroir conique, & des intervalles K1, K2, K3, K4, des circonférences de cercle, qui représenteront celles du prototype ABCD, & dont la plus grande doit être divisée en autant de parties égales que la circonférence ABCD. Puis tirez du centre O, par les points de division des demi-diamétres,

Digitized by Google



To. I. Pl. 32

Digitized by Google

qui donneront sur le plan horisontal autant de petits espaces difformes que dans le prototype ABCD, dans lesquels par conséquent on pourra transporter la figure de prototype. Cette image se trouvera extrêmement défigurée sur le plan horisontal, & paroîtra néanmoins par refléxion dans ses justes proportions sur la surface du miroir conique posée le cercle FGHI, quand l'œil sera mis perpendiculairement au-dessus du centre O, & éloigné de ce centre O d'une distance égale à la ligne KN.

REMARQUE.

Pour ne vous pas tromper en transportant ce qui est dans le prototype ABCD, sur le plan horisontal, on prendra garde que ce qui est le plus éloigné du centre E, doit être le plus proche de la base FGHI du miroir conique, comme vous voyez par les mêmes lettres *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, du plan horisontal & du prototype. On observera la même chose à l'égard d'un miroir cylindrique, comme vous voyez aussi par les quatre lettres semblables *a*, *b*, *c*, *d*, du plan horisontal & du prototype. Plan. 32. Fig. 88.

PROBLEME L.

Décrire une Lanterne artificielle, par le moyen de laquelle on puisse lire la nuit de fort loin.

FAites une Lanterne qui ait la forme d'un cylindre, ou d'un petit tonneau situé selon sa longueur, comme un tonneau de vin posé dans une cave, en sorte que la fumée passe par le bondon. Mettez à l'un de ses deux fonds un miroir

concave parabolique. Appliquez à son foyer la flamme d'une bougie, dont la lumiere se refléchira fort loin en passant par l'autre fonds qui doit être ouvert, & elle paroîtra si éclatante, que la nuit on pourra lire de fort loin des lettres très-petites, lorsqu'on les regardera avec des lunettes de longue-vûe. Ceux, qui verront de loin la lumiere de cette bougie, croiront voir un grand feu, qui paroîtroit encore plus éclatant, si la Lanterne, étant étamée par le dedans, avoit la figure d'une Ellipse.

REMARQUE.

On se sert aussi d'un semblable miroir pour la *Lanterne Magique*, ainsi appellée, parce que par son moyen l'on fait voir sur une muraille blanche de quelque chambre obscure tout ce que l'on veut. De sorte qu'on peut faire paroître des monstres & des spectres si affreux, que celui qui les voit sans en connoître le secret, croit que cela se fait par magie. La lumiere, qui se refléchit par le moyen de ce miroir, passe par un trou de la Lanterne, où il y a un verre de lunette. On fait passer entre ce verre & la lumiere une piece de bois plate & déliée, contenant plusieurs petits verres peints de diverses figure extraordinaires & affreuses, que l'on fait couler successivement par une fente qui est dans le corps de la Lanterne. Ces petites figures se représentent sur la muraille opposée avec leurs mêmes couleurs & proportions en plus grand volume : ce qui donne de la terreur, & cause de l'admiration aux spectateurs qui n'en connoissent pas l'artifice. Voyez les Problêmes de Physique.

Digitized by Google

PROBLEME LI.

Par le moyen de deux Miroirs plans faire paroître un visage sous des formes differentes.

AYant placé horisontalement l'un des deux Miroirs plans, élevez l'autre à peu près à angles droits au-dessus du premier, les deux Miroirs demeurant dans cette situation, si vous vous approchez du Miroir perpendiculaire, vous y verrez votre visage tout-à-fait difforme & imparfait. car il paroîtra sans front, sans yeux, sans nez & sans oreilles, vous ne verrez que la bouche & le menton fort élevés. Si vous inclinez tant soit peu le miroir perpendiculaire, votre visage y paroîtra avec toutes ses parties, excepté les yeux & le front. Si vous l'inclinez un peu plns, vous y verrez deux nez & quatre yeux, & en l'inclinant encore un peu d'avantage, vous y verrez trois nez & six yeux. Si vous continuez à l'incliner un peu davantage, vous ne verrez plus que deux nez,, deux bouches & deux mentons ; & en l'inclinant encore un peu plus, vous y verrez seulement un nez & une bouche : & votre visage cessera de paroître entierement dans ce miroir, si vous l'inclinez encore un peu plus, ce qui arrivera lorsque l'angle d'inclinaison sera d'environ 45 degrés.

Si vous inclinez les deux miroirs l'uu à l'autre ; vous y pourrez voir votre visage tout entier, & par les différentes inclinaisons, vous verrez dans le méme Miroir l'image de votre visage alternativement droite & renversée, &c.

REMARQUES.

Si on mêle avec la matiere du Miroir, lorsqu'elle

est encore dans la fournaise, un peu de massicot; de safran, ou quelqu'autre couleur jaune, celui qui s'y mirera paroîtra avoir la jaunisse. Si on y mêle du noir en petite quantité, il paroîtra avoir la face livide & comme plombée; si on en mêle en plus grande quantité, il semblera avoir le visage d'un Ethiopien. Si on y jette de la lacque, du cinabre ou vermillon, celui qui s'y regardera, sera étonné de se voir tout rouge & comme enflammé de colere, ou enluminé comme un yvrogne. En un mot, on paroîtra avoir autant de couleurs différentes qu'on en aura mêlé dans la matiere dont on aura fait les Miroirs, où l'on se regardera.

PROBLEME LII.

Faire voir un jetton qui seroit caché à l'œil dans le fond d'un vase vuide.

ON a mis un jetton C au fond d'un vase vuide AB. On s'est éloigné du vase, jusqu'à ce que l'extrêmité E du bord de ce vase ait caché ce jetton à l'œil placé en D. On propose de faire en sorte que l'œil apperçoive le jetton, sans changer la situation de l'un ni de l'autre. Faites emplir d'eau le vase: aussi-tôt l'œil appercevra le jetton, comme s'il étoit un peu élevé vers F.

Plan. 27. Fig. 10.

On a déja dit que les rayons de lumiere se rompoient en s'écartant de la perpendiculaire, lorsqu'ils passoient d'un milieu transparant dans un autre milieu transparant plus fluide. Le vase étant vuide, on ne pouvoit appercevoir le jetton, parce que le bord du vase empêchoit les rayons de lumiere d'être reflêchis du jetton à l'œil. Mais le

Digitized by Google

vase ayant été rempli d'eau, un rayon de lumiere, par exemple, CE, sortant de l'eau, au lieu de continuer jusqu'en G par la droite EG, se détourne, & va frapper l'œil par la ligne ED, qui s'écarte de la perpendiculaire EH.

Ce jetton paroît un peu élevé vers F, à cause qu'on croit le voir par la ligne droite DF, qui est égale aux deux lignes AE & EC.

On explique par ce principe pourquoi un bâton mis obliquement dans l'eau, paroît rompu.

PROBLEME LIII.

Représenter une Iris sur le plancher d'une chambre obscure.

IL faut se servir d'un prisme triangulaire, que les Artisans appellent simplement *triangle*, qui étant appliqué sur la racine du nez, fait paroître les objets avec des couleurs semblables à celle de l'Iris, ou Arc-en-ciel. Mettez ce prisme à une fenêtre de la chambre où le Soleil donne, les rayons du Soleil en passant au travers de ce verre triangulaire, formeront sur le plancher de la chambre une Iris, qui sera très-agréable à voir, principalement si le plancher est fait en voute, parce que cela donnera à l'Iris une figure ronde & semblable à celle de l'Iris que nous voyons dans les nuées.

REMARQUES.

Ce prisme triangulaire nous donne occasion de rapporter ici ce que M. de Mairan a dit dans sa Dissertation sur les Phosphores & les Noctiluques, touchant les rayons de lumiere qui passent

au travers d'un prisme triangulaire. Voici de quelle maniere il s'exprime.

» On prouve par des expériences décisives.

» Que la lumiere contient en elle-même toutes » les couleurs indépendamment des configurations » intérieures ou extérieures des corps au travers » desquels elle passe, ou sur lesquels elle se reflé- » chit ; c'est-à-dire, qu'un rayon sensible du Soleil, » par exemple, est composé de particules de diffé- » rente espéce, dont chacune a la propieté d'ex- » citer dans l'ame, par le moyen de l'organe de la » vûe, le sentiment de couleur particuliere de cet- » te espece, sans qu'aucune refléxion, ni qu'aucune » réfraction puisse jamais la changer.

» Que le blanc n'est pas proprement une couleur » mais un composé de toutes les couleurs, & que » le noir au contraire n'est que la négation de tou- » tes les couleurs,

» Que chaque couleur des corps ne consiste dans » la figure & dans l'arrangement particulier des » parties qui le composent, qu'entant qu'ils sont » par-là plus propres à rompre & à absorber dans » leurs pores la lumiere d'une certaine couleur, & » à reflechir celles d'une autre couleur. Ainsi le » carmin, par exemple, est fort rouge, parce qu'il » ne reflechit que la lumiere rouge, & que toutes » les autres especes de lumiere se rompent & se » perdent dans les pores sans se reflechir.

» Enfin que chaque espece de lumiere a sa refrac- » tion déterminée, c'est-à-dire, que chaque cou- » leur en passant obliquement d'un milieu dans un » autre, de l'air, par exemple, dans le cristal se » rompt à sa rencontre par un angle particulier, » different de celui des autres couleurs. C'est ce » que M. *Newton*, Auteur de cette découverte ;

Digitized by Google

appelle la *differente refrangibilité des couleurs de la lumiere.* C'est principalement par cette propriété qu'il a reconnu toutes les autres, & les ingénieuses expériences, dont il s'est servi pour s'en assurer, pourroient toutes seules immortaliser un nom moins célebre que le sien. Voici la plus facile, qui suffira néanmoins pour mettre les personnes qui n'ont pas vû l'Optique de M. Newton, au fait de ce que j'ai à dire sur cette matiere «

Faites entrer un rayon de soleil dans une chambre obscure, par un petit trou rond de 3 ou 4 lignes de diamétre : placez horisontalement auprès de ce trou un prisme triangulaire de verre, dans une telle situation, que le rayon du Soleil soit à peu près perpendiculaire à l'axe de ce prisme, & qu'il entre par une de ses surfaces, & sorte par l'autre, de maniere que le tranchant formé par ces deux surfaces, regarde en bas. Ce rayon, après avoir traversé le prisme, entrera dans la chambre, en s'étendant de bas en haut, & s'ira peindre sur le mur opposé. Il est encore mieux de le recevoir sur un carton bien blanc, à sept ou huit pas de la fenêtre, & il y formera une bande verticale d'un pied de longueur, par exemple, & de deux ou trois pouces de largeur. Cette bande contiendra séparément les cinq *couleurs primitives*, rouge, jaune, verd, bleu & violet, qui la diviseront en cinq espaces un peu inégaux, en commençant par le bas dans l'ordre précédent, rouge, &c. Les nuances, ou les couleurs secondes, se trouveront entre les couleurs primitives dont elles participent ; sçavoir entre le rouge, & le jaune, la couleur d'or foncé; entre le bleu azuré & le violet, le bleu turquin, & ainsi des au-

« autres. Si l'on fait passer au travers d'un autre « prisme, à quatre ou cinq pas du premier, une » seule de ces couleurs séparées, qui composoient » le rayon, elle ne changera point du tout en s'y » rompant, parce qu'elle ne contient qu'une lu- » miere homogene, mais si on les ramasse toutes » par le moyen de quelque verre convexe, elles » se confondront, & il se formera de leur confusion » un nouveau rayon de lumiere blanc tirant sur le » jaune, & tel qu'il étoit en partant du Soleil, ou » avant que d'avoir traversé ce premier prisme. » On peut varier cette expérience de mille manie- » res, & à force de filtrer, si je l'ose dire, & de » tamiser ainsi la lumiere, se convaincre parfaite- » ment qu'elle a toutes les propriétés dont j'ai fait » mention. Il faut observer sur-tout que le diffé- » rent degré de *refrangibilité* de ses couleurs, » lorsqu'elle passe au travers d'un prisme, & l'u- » nique cause de leur séparation, & qu'ainsi le vio- » let, par exemple, est plus *refrangible* que le rou- » ge de la quantité d'un angle, dont le sinus est » proportionnel à la distance qu'il a du rouge au » violet dans la bande verticale.

Fin du premier Tome.

Digitized by Google

TABLE DES PROBLEMES.

PROBLEMES D'ARITHMETIQUE.

PROBLEME I. *Des Religieuſes ſont retirées en huit Cellules, tellement diſpoſées, qu'il y en a quatre dans les quatre coins du Dortoir bâti en quarré, & chacune des quatre autres eſt au milieu de chaque côté. L'Abbeſſe, qu'on ſuppoſe aveugle, fait ſa viſite : elle compte le nombre des Religieuſes qui ſont dans les trois Cellules d'un rang ; elle trouve que les nombres des Religieuſes d'un rang eſt égal à celui de chaque autre rang, en prenant pour un rang deux Cellules des coins & celle du milieu. Cette Abbeſſe fait une ſeconde viſite, & compte dans chaque rang le même nombre de perſonnes que dans la premiere viſite, quoiqu'il y ſoit entré quatre hommes. Enfin dans la troiſiéme viſite qu'elle fait, elle trouve encore dans chaque rang le même nombre de perſonnes qu'auparavant, quoique les quatre hommes ſoient ſortis, & qu'ils ayent emmené chacun une Religieuſe.* p. 1.

PROBL. II. *On a mené ſur le bord d'une riviere un Loup, une Chevre & un Chou. On propoſe à un Batelier de les paſſer ſeul à ſeul, de maniere qu'en ſon abſence le Loup ne faſſe aucun mal à la Chevre, & que la Chevre ne touche point au Chou.* 3

PROBL. III. *Trois maris jaloux ſe trouvent avec leurs femmes pendant une nuit fort obſcure, au paſſage d'une riviere. Ils rencontrent un bateau ſans Batelier. Ce bateau eſt ſi petit, qu'il ne peut porter que deux perſonnes à la fois. On demande*

d by Google

comment ces six personnes passeront deux à deux ; de sorte qu'aucune femme ne demeure en la compagnie d'un ou de deux hommes, si son mari n'est présent. 4

PROBL. IV. *Faire l'addition d'une maniere particuliere, & qui soit inconnue à tout autre,* 5

PROBL. V. *Soustraire par une seule opération plusieurs sommes de plusieurs autres sommes données* 6

PROB. VI. *Multiplication abregée.* 7

Multiplication par les doigts. 11

Autre Multiplication abregée. 12

PROBL. VII. *Division abregée.* 13

PROB. VIII. *De quelques propriétés des nombres.* 16

Regle générale pour trouver tant de nombres amiables qu'on voudra. 39

Table des nombres premiers entre 1 & 10000. 37

PROB. IX. *Des Triangles rectangles en nombres.* 50

PROB. X. *De la Progression Arithmétique.* 56

QUESTION I. *Un propriétaire fait faire un puits à un Masson, avec cette condition, qu'il lui donnera 3 livres pour la premiere toise de profondeur, 5 pour la seconde, 7 pour la troisiéme : & ainsi de suite en augmentant de 2 l. à chaque toise, jusqu'à 20 toises de profondeur: on demande combien il sera dû au Masson quand les 20 toises de profondeur seront achevées.* 60

QUEST. II. *Un Voyageur a fait 100 lieues en huit jours ; chaque jour il a fait également plus de chemin que le jour précédent, & le premier jour il a fait 2 lieues ; on demande combien de lieues il a fait chaque jour.* 61

QUEST. III. *Un Voyageur a fait 100 lieues en 8 jours, & il a fait chaque jour 3 lieues plus que le précédent ; on demande combien de lieues il a fait chaque jour.* 62

QUEST. IV. *Un Voleur en s'enfuyant fait 8 lieues par jour ; il est poursuivi par un Archer qui n'a fait que 3 lieues le premier jour, 5 le second, 7 le troisiéme,*

Digitized by Google

& ainsi de suite en augmentation de 2 lieues chaque jour. On demande en combien de jours l'Archer atteindra le voleur, & combien de lieues chacun aura fait. 63

QUEST. V. *On suppose que de Paris à Lyon, il y a 100 lieues, que deux Couriers sont partis en même tems & par la même route, l'un de Paris pour aller à Lyon, en faisant 2 lieues chaque jour plus que le précédent, & l'autre de Lyon pour venir à Paris, en faisant 3 lieues chaque jour plus que le précédent: & que précisement au milieu du chemin ils se sont rencontrés, le premier au bout de 5 jours, & le second au bout de 4 jours. On demande combien de lieues ces deux Couriers ont fait chaque jour.* 64

QUEST. VI. *Il y a un panier & cent pommes rangées en ligne droite, & éloignées par tout d'un pas l'une de l'autre. On demande combien de pas feroit celui qui entreprendroit de cueillir ces pommes les unes après les autres, & de les rapporter dans le panier, qui resteroit toujours dans la même place.* 65

QUEST. VII. *Un Marchand est convenu avec un de ces créanciers de lui donner de l'argent chaque semaine: la premiere semaine il lui a donné cent l. la seconde quatre cens l. il a augmenté chaque semaine son payement de trois cens l. On demande combien il a payé la vingt-huitiéme semaine.* 66

QUEST. VIII. *Un reservoir a douze canaux: par le second il s'écoule dans une heure 2 pintes d'eau plus que par le premier: par le troisiéme 2 pintes plus que par le second, & ainsi de suite. On sçait que tous ces canaux laissent écouler 168 pintes d'eau dans une heure. On veut sçavoir combien chacun de ces canaux laissent écouler d'eau pendant une heure.* 67

QUEST. IX. *Un pere de famille ordonne par son testament que l'aîné de ses enfans prendra sur tous ses biens 10000 l. & le septiéme de ce qui restera; que le second prendra 20000 l. & le septiéme de ce qui*

restera; que le troisiéme prendra 30000 *l. & le septiéme de ce qui restera, & ainsi de suite en augmentant toujours de* 10000 *liv. avec le septiéme du restant. Les enfans ayant suivi la disposition du testament, il se trouve qu'ils ont été également partagés. On demande quel étoit le bien à partager, le nombre des enfans, & la somme que chacun a eu.* 67

PROBL. XI. *De la Progression Géometrique.* 68

QUEST. I. *Un grand Navire en poursuit un plus petit, dont il est éloigné de 4 lieues, & il va deux fois plus vite que le plus petit : ils sont sur le même Rumb. On demande le chemin que le grand Navire doit faire pour atteindre le petit.* 75

QUEST. II. *On suppose qu'Achille aille dix fois plus vite qu'une Tortue, qui auroit une lieue d'avance. On demande s'il est possible qu'Achille attrape cette Tortue, & à quelle distance il l'attrapera.* 76

QUEST. III. *Une pendule a deux aiguilles, l'une des heures, & l'autre des minutes. Supposons qu'elles partent toutes deux du point de midi, on demande en quel autre point elles doivent se rencontrer.* ibid.

QUEST. IV. *Un Maquignon vend un très-beau cheval, il se contente du prix du vingt-quatriéme clou du cheval, pourvû qu'on veuille compter de maniere que du premier clou on donnât un denier, du second 2 deniers, du troisiéme 4 deniers, & ainsi de suite, en doublant les deniers jusqu'au vingt-quatriéme clou. On demande de quel prix seroit le cheval.* 77

QUES. V. *Une vieille Dame possede trente-deux belles Terres; elle est fort avare, elle aime l'argent encore plus que ses Terres; elle voudroit en vendre quelques unes, afin d'avoir le plaisir de marcher sur l'or; mais pour ne point effrayer un de ses heritiers, qui est homme de cœur, elle ne propose d'abord que la moindre à vendre, sous prétexte que l'argent est rare, & qu'elle a quelques dettes à payer, quoique ces coffres soient pleins. On offre de lui donner pour cette Terre*

Digitized by Google

la somme qui conviendroit à la trente-deuxiéme de ses Terres, si on payoit un sol pour la premiere, deux sols pour la seconde, quatre sols pour la troisiéme, & ainsi de suite en doublant les sols jusques à la trente-deuxiéme Terre. Cette Dame apprehende d'être trompée, elle demande quel prix on lui donneroit de sa Terre. 78

QUEST. VI. *On suppose qu'un grain de bled produise 50 autres grains dans la premiere année; qu'on seme ces cinquante grains, & qu'ils produisent chacun 50 grains la deuxiéme année, & ainsi de suite: On demande quel sera le nombre des grains de bled qui seront produits pendant douze années.* 79

QUEST. VII. 80

PROBL. XII. *Des Quarrés Magiques.* 82

Des Quarrés Magiques impairs, formés par des termes en progression Arithmetique. 83

QUEST. *Disposer en trois rangs les neufs premieres cartes, depuis l'as jusqu'au neuf, de sorte que tous les points de chaque rang pris en long, ou en large, ou en diagonale, fassent ensemble une même somme.* 93

Des quarrés Magiques pairs formés par des termes en progression Arithmetique. 94

Des quarrés Magiques pairs formés par des termes en progression Géométrique. 98

Des quarrés Magiques impairs, dont les termes sont en progression Géométrique. 100

Des quarrés Magiques en proportion Harmonique. 101

PROBL XIII. *Du Triangle Arithmétique.* 103

Des Combinaisons. ibid.

QUEST. I. 112

QUEST. II. 113

Des Permutations. ibid.

Quest. I. 118
Quest. II. ibid.
Quest. III. 119
Quest. IV. ibid.
Quest. V. 120
Quest. VI. 121
Quest. VII. 122
Des Parties de Jeu. 123
Du Jeu de Dez. 131
Probl. XIV. *Plusieurs Dez étant jettez, trouver le nombre des points qui en proviennent après quelques opérations.* 135
Probl. XV. *Deux Dez étant jettés, trouver les points de dessus de chaque Dé, sans les voir.* 138
Probl. XVI. *Trois Dez étant jettés, trouver les points de dessus de chaque Dé, sans les voir.* 140
Probl. XVII. *Deviner le nombre que quelqu'un a pensé.* 141
Probl. XVIII. *Trouver le nombre qui reste à quelqu'un après quelques opérations, sans lui rien demander.* 151
Probl. XIX. *Trouver le nombre que quelqu'un aura pensé, sans lui rien demander.* 154
Probl. XX. *Deviner deux nombres que quelqu'un aura pensé.* 156
Probl. XXI. *Deviner plusieurs nombres que quelqu'un aura pensé.* 160
Probl. XXII. *Une personne tenant dans une main un certain nombre pair de pistoles, & un nombre impair en l'autre main, deviner en quelle main est le nombre pair.* 164
Question. *Une personne tenant une piéce d'or dans une main, & une piéce d'argent en l'autre, trouver en quelle main est la piéce d'or, & en quelle main est la piéce d'argent.* 166
Digitized by Google

PROBL. XXIII. *Trouver deux nombres, dont on connoît la raison & la différence.* 167
QUESTION. *Quelqu'un ayant dans une main autant de piéce de monnoye que dans l'autre, deviner combien il en a en chaque main.* 168
PROBL. XXIV. 169
QUEST. I. *Une personne ayant pris autant de jettons ou piéces de monnoye, dans une main que dans l'autre, deviner combien il y en a en tout.* 169
QUEST. II. *Une personne charitable sortant de sa maison, rencontre à sa porte un certain nombre de pauvres, &c.* 175
QUEST. III. *De l'Asne & du Mulet.* 176
QUEST. IV. *Les Graces portant des couronnes de fleurs, &c.* 178
QUEST. V. *Trois personnes veulent acheter une maison 26000 livres, mais ils sont convenus que l'un donneroit la moitié de l'argent, l'autre le tiers, & le troisiéme le quart. On demande combien ils doivent donner chacun.* 179
QUEST. VI. *Un pere en mourant laisse sa femme enceinte, &c.* ibid.
QUEST. VII. *On dit d'une personne qu'elle a passé le quart de sa vie en enfance, la cinquiéme partie en la jeunesse, le tiers en l'âge viril, & qu'il y a treize ans qu'elle a commencé à entrer dans sa veillesse. On demande l'âge de cette personne.* ibid.
QUEST. VIII. *Quarante-une personnes se sont trouvées à un repas : il y avoit des hommes, des femmes & des enfans. La dépense a été de quarante sols, les hommes ont payé quatre sols par tête, les femmes trois sols chacune, & les enfans quatre deniers chacun. On demande le nombre des hommes, celui des femmes, & celui des enfans.* 180
QUEST. IX. *Du Lion de bronze, &c.* ibid.

QUEST. X. *Trois Imprimeurs veulent entreprendre l'impreſſion d'un Livre, &c.* 181

PROBL. XXV. *Deux perſonnes étant convenues de prendre à volonté des nombres moindres qu'un nombre propoſé, en continuant alternativement juſqu'à ce que tous leurs nombres faſſent enſemble un nombre determiné plus grand que je le propoſe; faire qu'on arrive le premier à ce nombre déterminé plus grand.* 182

PROBL. XXVI. *Diviſer un nombre donné en deux parties, dont la raiſon ſoit égale à celle des deux nombres donnés.* 184

QUEST. I. *Faire la monnoye d'un écu blanc en deux eſpéces differentes, en ſorte qu'il y ait autant d'une eſpece que de l'autre.* 185

QUEST. II. *Un Marchand de vin n'a que deux ſortes de vins, l'un à dix ſols, & l'autre à cinq ſols la bouteille. On lui demande trente bouteilles de vin à huit ſols. Que doit-il faire pour mêler ces deux vins, de ſorte que la bouteille revienne à huit ſols?* 187

PROBL. XXVII. *Trouver un nombre tel qu'étant diviſé ſéparément par des nombres donnés, il reſte par tout* 1, *& étant diviſé par un autre nombre donné, il ne reſte rien.* 188

QUESTION. *Trouver combien il y avoit de louis d'or dans une bourſe, qu'une perſonne dit avoir perdue, & qui aſſure qu'en les comptant deux à deux, ou trois à trois, ou cinq à cinq, il en reſtoit toujours un, & qu'en les comptant ſept à ſept, il n'en reſtoit point.* 192

PROBL. XXVIII. *Diviſer pluſieurs nombres donnés chacun en deux parties, & trouver deux nombres: en ſorte que multipliant la premiere partie de chacun des nombres donnés par le premier nombre trouvé, & la ſeconde par le ſecond, la ſomme des*

Digitized by Google

deux produits soit par tout la même. 199

QUEST. I. *Une femme a vendu dix pommes au marché à un certain prix ; une autre femme en a vendu vingt-cinq au même prix, & une troisiéme femme en a vendu trente aussi au même prix, & chacune a rapporté une même somme d'argent. On demande comment cela se peut faire.* 201

QUEST. II. *Du Chef de cuisine, &c.* 211

QUEST. III. *Une femme de la campagne a porté au marché des œufs, des fromages, &c.* 212

PROBL. XXIX. *Plusieurs nombres pris suivant leur suite naturelle* 1, 2, 3, 4, *&c. étant disposés en rond, deviner celui que quelqu'un aura pensé.* ibid.

PROBL. XXX. *Ayant fait prendre à trois personnes un nombre de jettons ou de cartes à certaines conditions, deviner combien chacun en aura pris.* 214

PROBL. XXXI. *De trois cartes inconnues, deviner celle que chacune des trois personnes aura prise.* 215

PROBL. XXXII. *Trois cartes ayant été présentées à trois personnes, deviner celle que chacun aura prise.* 217

PROBL. XXXIII. *Deviner entre plusieurs cartes celle que quelqu'un aura pensé.* 218

PROBL. XXXIV. *Plusieurs cartes différentes étant proposées successivement à autant de personnes, pour en retenir une dans sa mémoire, deviner celle que chacun aura pensé.* 219

PROBL. XXXV. *Plusieurs cartes étant disposées également en trois rangs, deviner celle que quelqu'un aura pensé.* 220

PROBL. XXXVI. *Deviner combien il y a de points dans une carte que quelqu'un aura tiré d'un jeu de cartes.* 221

PROBL. XXXVII. *Deviner le nombre de tous les points qui sont en deux cartes qu'on aura tiré d'un*

Digitized by Google

jeu de cartes entier. 222

PROBL. XXXVIII. *Deviner le nombre de tous les points qui ſont en trois cartes, qu'on aura tiré à volonté d'un jeu de cartes.* 224

PROBL. XXXIX. *De ſeize jettons, deviner celui que quelqu'un aura penſé.* 231

PROBL. XL. *Du jeu de l'Anneau.* 233

PROBL. XLI. *Pluſieurs cartes étant diſpoſées en divers rangs, deviner celle que quelqu'un aura penſé.* 236

PROBL. XLII. *Ayant un vaſe rempli de huit pintes de quelque liqueur, en mettre juſtement la moitié dans un autre vaſe de cinq pintes, par le moyen d'un troiſiéme vaſe contenant trois pintes.* 238

PROBL. XLIII. *Une perſonne a une bouteille de douze pintes pleine de vin : il en veut donner ſix pintes au Frere Quêteur ; il n'a pour les meſurer que deux autres bouteilles, l'une de ſept pintes, & l'autre de cinq. Que doit-il faire pour avoir les ſix pintes dans la bouteille de ſept pintes ?* 240

PROBL. XLIV. *Partager à trois perſonnes vingt-un tonneaux, dont il y en a ſept vuides, ſept pleins, & ſept demi pleins ; de telle maniere que ces trois perſonnes ayent autant de tonneaux & de vin l'un que l'autre.* 242

PROBL. XLV. *Quinze Chrétiens & quinze Turcs ſe trouvant, &c.* 246

PROBL. XLVI. *Trois choſes ayant été diſtribuées ſecretement à trois perſonnes, deviner celle que chacun aura pris.* 250

PROBL. XLVII. *Trois perſonnes ont un certain nombre d'écus : la premiere perſonne donne des ſiens aux deux autres autant qu'elles en ont chacune ; enſuite la ſeconde en donne aux deux autres autant qu'elles en ont chacune : enfin la troiſiéme en donne aux*

Digitized by Google

deux autres autant qu'elles en ont chacune. Cette distribution étant faite, il se trouve que chaque personne a huit écus. On demande combien elles en avoient chacune. 253

PROBL. XLVIII. *Il se trouve trois personnes dans une compagnie, la seconde est plus agée que la premiere de douze ans, la troisiéme est plus âgée que la seconde de treize ans : leurs trois âges font le nombre de cent ans. On demande quel est l'âge de chaque personne.* 254

PROBL. XLIX. *Découvrir si un ouvrage que l'Ouvrier assure être de pur or, est mêlée d'argent, sans l'endommager.* ibid.

PROBL. L. *Un Boucher donne commission d'acheter pour cent écus cent bêtes ; sçavoir, des bœufs, des veaux, &c.* 255

PROBL. LI. QUEST. I. *Un Particulier a fait marché avec un Ouvrier pour creuser un puits, &c.* 256

QUEST. II. *Un Tailleur a pris six aulnes de drap, qui a trois quarts de large, pour faire un habit complet : on veut sçavoir combien il faut d'aulnes d'une etoffe qui n'a qu'une demi-aulne de large.* 257

PROBL. LII. *Faire parcourir au Cavalier du Jeu des Echets toutes les cases du Damier, l'une après l'autre, sans entrer deux fois dans la même case.* 260

PROBLEMES DE GEOMETRIE.

PROBLEME I. *Elever une perpendiculaire à une ligne donnée par l'une de ses extrémités.* 270

PROBL. II. *Mener par un point donné une ligne parallele à une ligne donnée.* 271

PROBL. III. *Diviser d'une même ouverture de compas une ligne donnée en autant de parties égales qu'on voudra.* 272

PROBL. IV. *Faire un angle qui ſoit la moitié, ou le double d'un angle donné.* 273

PROBL. V. *Faire un angle qui ſoit le tiers ou le triple d'un angle donné.* 274

PROBL. VI. *Trouver à deux lignes données une troiſiéme, & autant d'autres proportionnelles qu'on voudra.* ibid.

PROBL. VII. *Décrire ſur une ligne donnée autant de Triangles differens qu'on voudra, dont les aires ſoient égales.* 275

PROBL. VIII. *Décrire ſur une ligne donnée autant de Triangles differens qu'on voudra, dont les contours ſoient égaux.* 276

PROBL. IX. *Décrire deux triangles iſoſceles differens, de même aire, & de même contour.* 277

PROBL. X. *Décrire differens triangles rectangles, dont les aires ſoient égales.* 280

PROBL. XI. *Décrire trois triangles égaux, dont le premier ſoit rectangle, le ſecond ſoit acutangle, & le troiſiéme ſoit obtuſangle.* 282

PROBL. XII. *Trouver une ligne droite égale à un arc de cercle donné.* 284

PROBL. XIII. *Trouver entre deux lignes données, une, ou deux, ou trois moyennes proportionnelles.* 286

PROBL. XIV. *Décrire dans un cercle donné quatre cercles égaux qui ſe touchent mutuellement, & qui touchent auſſi la circonférence du cercle donné.* 288

PROBL. XV. *Décrire dans un demi cercle donné trois cercles, qui touchent la circonférence & le diamétre de ce demi cercle donné, & dont celui du milieu, qui eſt le plus grand, touche les deux autres, qui ſont égaux.* 289

PROBL. XVI. *Décrire quatre cercles proportionnels, en ſorte que leur ſomme ſoit égale à un cercle*

Digitized by Google

donné, & que la somme de leurs rayons soit égale à une ligne donnée. 290

PROBL. XVII. *Déterminer la circonférence d'un cercle donné un arc, dont le sinus soit egal à la corde d'un complement de cet arc.* 291

PROBL. XVIII. *Décrire un triangle rectangle, dont les trois côtés soient en proportion Géométrique.* 292

PROBL. XIX. *Décrire quatre cercles égaux qui se touchent mutuellement, & qui touchent par le dehors la circonférence d'un cercle donné.* 294

PROBL. XX. *Décrire un triangle rectangle, dont les trois côtés soient en Proportion Arithmétique.* 295

PROBL. XXI. *Décrire autour d'un triangle équilatéral donné six cercles égaux, qui se touchent mutuellement, dont trois touchent les trois côtés du triangle, & les trois autres sont portés par ses sommets.* 296

PROBL. XXII. *Plusieurs demi-cercles qui se touchent au sommet de l'angle droit de deux lignes perpendiculaires, & qui ont leurs centres sur l'une de ces deux lignes étant donnés, déterminer les points où ces demi-cercles peuvent être touchés par des lignes droites tirées de ces points à un point donné sur l'autre ligne perpendiculaire.* 297

PROBL. XXIII. *Décrire un triangle rectangle, dont l'aire exprimée en nombre, soit égale au contour.* 298

PROBL. XXIV. *Décrire au dedans d'un triangle équilatéral, trois cercles égaux qui se touchent mutuellement, & qui touchent aussi les trois côtés de ce triangle.* 299

PROBL. XXV. *Décrire un triangle rectangle dans l'aire exprimée en nombre, soit sesquilatere du*

Digitized by Google

contour aussi exprimé en nombres. 301

PROBL. XXVI. *Décrire au-dedans d'un quarré donné quatre cercles égaux, qui se touchent mutuellement, & qui touchent aussi les côtés de ce quarré.* 302

PROBL. XXVII. *Décrire un Parallelogramme rectangle, dont l'aire exprimée en nombres, soit égale au contour.* 303

PROBL. XXVIII. *Mesurer avec le chapeau une distance qui n'est accessible qu'en une de ses extrémités.* 305

PROBL. XXIX. *Mesurer une ligne horizontale, qui n'est accessible qu'en l'une de ces deux extrémités, par le moyen de deux bâtons inégaux.* 306

PROBL. XXX *Mesurer une hauteur accessible par le moyen de son ombre.* 307

PROBL. XXXI. *Trouver à trois lignes données une quatriéme proportionnelle.* ibid.

PROBL. XXXII. *Décrire sur une ligne donnée un Parallelogramme rectangle, dont l'aire soit double de celle du triangle donné.* 308

PROBL. XXXIII. *Changer un triangle donné en un autre triangle, dont chaque côté soit plus grand que chaque côté du triangle donné.* ibid.

PROBL. XXXIV. *Deux demi-cercles qui se touchent en dedans étant donnés sur une même ligne droite, décrire un cercle qui touche la ligne droite, & les circonférences des deux demi-cercles donnés.* 309

PROBL. XXXV. *Trois demi-cercles qui se touchent en dedans, étant donnés sur une ligne droite, décrire un cercle qui touche les circonférences des trois demi-cercles.* 311

PROBL. XXXVI. *Trois demi-cercles qui se touchent en dedans, étant donnés, &c.* 312

PROBL. XXXVII. *Décrire un Triangle, dont l'aire*

Digitized by Google

& le contour soient au même nombre quarré. 314
PROBL. XXXVIII. *Faire passer une circonférence de cercle par trois points donnés, sans en connoître le centre.* 315
PROBL. XXXIX. *Deux lignes perpendiculaires à une ligne tirée par leurs extrémités, étant données, trouver sur cette ligne aussi donnée, un point également éloignée de deux autres extrémités des deux lignes données.* 316
PROBL. XL. *Decrire deux triangles rectangles, dont les lignes soient telles, &c.* 317
PROBL. XLI. *Diviser la circonférence d'un demi-cercle donné en deux arcs inégaux, en sorte que le demi-diamétre soit moyen proportionnel entre les cordes de ces deux arcs.* 319
PROBL. XLII. *Une échelle d'une longueur connue, &c.* 320
PROBL. XLIII. *Mesurer une distance accessible sur la terre par le moyen de la lumiere & du bruit d'un Canon.* 321
PROBL. XLIV. *Mesurer la surface d'un parallelogramme.* 323
PROBL. XLV. *Mesurer la surface d'un cercle.* 325
QUEST. I. *Une Cuisiniere étant allée au marché, &c.* 327
QUEST. II. *Une corde de dix pieds de long entoure deux cens piques, on veut savoir combien une corde de huit pieds de long entourera de piques.* 328
QUEST. III. *Sempronius a emprunté de Caïus un sac de bled qui avoit cinq pieds de haut & quatre pieds de large; quand il fallut rendre le bled, Sempronius prit quatre sacs hauts de cinq pieds, &c.* ibid.
QUEST. IV. V. VI. ibid.
PROBL. XLVI. *Tracer un ovale sur le terrein.* 329
PROBL. XLVII. *Mesurer la surface d'un ovale.* 330

Digitized by Google

PROBLEMES DE MUSIQUE.

PROBL. I. *Faire sur les accords les quatre opérations de l'Arithmétique.* 332

PROBL. II. *Exprimer les accords par Logarithmes.* 334

PROBL. III. *Partager l'intervalle de l'Octave en sept autres intervalles simples, qui sont les Tons & demi-tons.* 335

PROBL. IV. *Mesurer la durée des Tons.* 341

PROBL. V. *Faire trembler sensiblement & à vûe d'œil la corde d'une Basse de Viole, ou de quelqu'autre Instrument, sans que personne y touche.* 342

PROBLEMES D'OPTIQUE.

PROBL. I. *Faire qu'un objet étant vû de loin, ou de près, paroisse toujours de la même grandeur.* 346

PROBL. II. *La ligne AC étant donnée, & la ligne CZ indéterminée étant perpendiculaire sur AC à son extrémité C, trouver dans la ligne CZ un point D, d'où la partie AB de la ligne AC soit vûe la plus grande qu'elle puisse être vûe dans toute l'étendue de la ligne CZ.* 347

PROBL. III. *L'œil étant placé en un point comme B, & regardant vers la ligne AE, couper de cette ligne la partie DE, qui soit vûe de la même grandeur qu'une autre partie AC de la même ligne AE.* 348

PROBL. IV. *Trouver un point, duquel deux parties inégales d'une ligne droite paroissent égales.* 349

PROBL. V. *Un Anneau étant placé à une certaine distance, proposer de l'enfiler avec une baguette recourbée par l'une de ses extrémités.* 350

PROBL. VI. *Representer en Perspective tel objet que l'on voudra, sans se servir de point de vûe.* 351

Digitized by Google

PROBL. VII. *Représenter en perspective un Polyedre équilatéral, terminé en six quarrés égaux, & par huit exagones reguliers & égaux entr'eux.* 352

PROBL. VIII. *Représenter en perspective un Polyedre équilatéral, terminé par six quarrés égaux, & par huit triangles équilateraux & égaux entre eux.* 355

PROBL. IX. *Représenter en perspective un Polyedre équilatéral, terminé par six Quarrés égaux, & par douze triangles isoscelles & égaux entr'eux, dont la hauteur est égale à la base.* ibid.

PROBL. X. *Représenter en perspective un Polyebre équilateral, terminé par douze Quarrés égaux, par huit exagones reguliers & égaux, & par six octogones reguliers & égaux.* 357

PROB. XI. *Un point de quelque objet, & le lieu de l'œil, étant donnez, trouver le point de réfléxion sur la surface d'un Miroir plat.* 359

PROBL. XII. *Tirer par derriere l'épaule un pistolet aussi justement que si on le couchoit en joue.* 360

PROBL. XIII. *Les points d'œil & de quelque objet, avec le point de reflexion sur la surface d'un Miroir plat, étant donnez, déterminer le lieu où l'on doit voir l'image de l'objet proposé.* 361

PROBL. XIV. *Se représenter dans un Miroir comme volant.* 363

PROBL. XV. *Disposer plusieurs Miroirs de maniere qu'on se voye dans chacun en même-tems.* ibid.

PROBL. XVI. *Un mari jaloux étant dans une chambre, lui fait voir ce que fait sa femme, &c.* 364

PROBL. XVII. *Faire paroître dans un Miroir un autre objet que celui qui semble devoir y être représenté.* 365

PROBL. XVIII. *Faire une boëte où l'on voye des objets, &c.* 367

PROBL. XIX. *Faire une machine d'Optique, où il paroitra une gallerie, &c.* 368
PROBL. XX. *Mesurer une hauteur par reflexion.* 372
Des Miroirs cylindriques & sphériques. 373
PROBL. XXI. *Les points de l'œil & de quelques objets, avec le point de reflexion sur la surface convexe d'un Miroir sphérique, étant donnez, déterminer l'endroit où l'on doit voir l'image de l'objet proposé.* ibid.
PROBL. XXII. *Déterminer le lieu de quelque objet, vû par reflexion sur la surface d'un Miroir cylindrique.* 376
PROBL. XXIII. *Les points de l'œil & de quelque objet, avec le point de reflexion sur la surface concave d'un Miroir sphérique, étant donnez, déterminer l'endroit où l'on doit voir l'image de l'objet proposé.* 377
PROBL. XXIV. *Des Miroirs ardens.* 379
PROBL. XXV. *Construire une chambre optique, où l'on voye les objets plus grands que la boëte.* 390
PROBL. XXVI. *Faire le moule d'un Miroir concave spherique.* ibid.
PROBL. XXVII. *Faire la composition que l'on employe aux Miroirs de métal.* 392
PROBL. XXVIII. *Polir les Miroirs de métal.* 393
Du Sable ou Grez. ibid.
Du Tripoli. 394
De la Potée d'Etain. 395
Des spheres de verre, propres à produire du feu aux rayons du Soleil. 396
PROBL. XXIX. *Trouver le foyer d'un Sphere ou boule de verre.* ibid.
Des Lentilles de verre propres à produire du feu aux rayons du Soleil. 403
PROBL. XXX. *Trouver le foyer des Lentilles de verre,*
Digitized by Google

convexe d'un côté & planes de l'autre, faites en forme de ſegment de Sphere. ibid.
PROBL. XXXI. Trouver le foyer des Lentilles de verre, convexes des deux côtés. 406
PROBL. XXXII. Trouver le foyer des Lentilles de verre, convexes d'un côté & concaves de l'autre. 407
PROBL. XXXIII. Repreſenter dans une Chambre fermée les objets, &c. 411
PROBL. XXXIV. Conſtruire une Chambre obſcure qu'on puiſſe tranſporter. 415
Uſage de la Machine qu'on vient de décrire. 420
I. Repréſenter les objets dans leur ſituation naturelle. ibid.
II. Repréſenter les objets en faiſant paroître à droite ce qui doit être à gauche. 421
III. Repréſenter tour à tour les objets qui ſont aux environs d'une campagne ou d'un jardin, &c. 423
IV. Repréſenter des Tableaux ou des Tailles-douces. ibid.
PROBL. XXXV. Des Verres à facettes. 426
PROBL. XXXVI. Conſtruire un Tableau Magique. page 428
PROBL. XXXVII. De la Lanterne Magique. 429
PROBL. XXXVIII. Des Lunettes d'approche ou Teleſcopes. 430
Des Microſcopes. 434
PROBL. XXXIX. Faire une Lentille pour un Microſcope ſimple. 435
PROBL. XL. Faire un Microſcope avec la Lentille dont on vient de donner la deſcription. 436
Uſage de ce Microſcope. ibid.
PROBL. XLI. Faire un Microſcope avec une goute d'eau. ibid.
De la Perſpective curieuſe. 439
PROBL. XLII. Décrire ſur un plan une figure difforme, qui paroiſſe au naturel, étant regardé d'un
Digitized by Google

point déterminé. 439

PROBL. XLIII. *Décrire sur un plan une figure difforme, qui paroisse dans sa perfection, etant vûe par reflexion dans un Miroir plan.* 440

PROBL. XLIV. *Décrire sur un plan horisontal une figure difforme, qui paroisse au naturel sur un plan vertical transparent, posé entre l'œil & la figure difforme.* 442

PROBL. XLV. *Décrire sur la surface convexe d'une Sphere une figure difforme, qui paroisse au naturel étant regardée d'un point déterminée.* 443

PROBL. XLVI. *Décrire sur la surface convexe d'un cylindre, une figure difforme, qui paroisse belle quand elle sera vûe d'un point déterminé.* 445

PROBL. XLVII. *Décrire sur la surface convexe d'un cone une figure difforme, qui paroisse en son naturel étant regardée d'un point déterminé.* 446

PROBL. XLVIII. *Décrire sur un plan horisontal une figure difforme, qui paroisse belle sur la surface convexe d'un Miroir cylindrique droit, étant vûe par reflexion d'un point donné.* 448

PROBL. XLIX. *Décrire sur un plan horisontal une figure difforme qui paroisse belle sur la surface convexe d'un Miroir conique élevé à angles droits sur ce plan, étant vûe par reflexion d'un point donné dans l'axe prolongé de ce cone.* 451

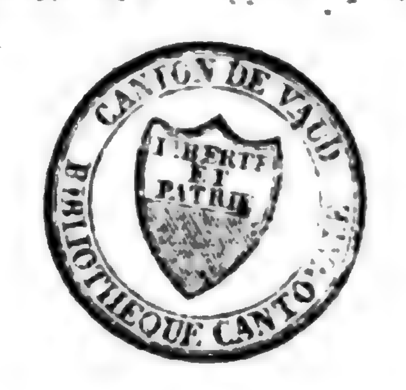
PROBL. L. *Décrire une Lanterne artificielle, par le moyen de laquelle on puisse lire la nuit de fort loin.* page. 453

PROBL. LI. *Par le moyen de deux Miroirs plans faire paroître un visage sous des formes différentes.* 455

PROBL. LII. *Faire voir un Jetton qui seroit caché à l'œil dans le fond d'un vase vuide.* 456

PROBL. LIII. *Représenter une Iris sur le plancher d'une chambre obscure.* 457

Fin de la Table du I. Tome.



Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google